

CUPRINS

Prefață	5
---------------	---

CAPITOLUL I ȘIRURI RECURENTE

§ 1. Concepte fundamentale	7
§ 2. Teoreme de existență și unicitate	9
§ 3. Recurențe liniare de ordinul I	12
§ 4. Recurențe liniare de ordin $k \geq 2$	18
§ 5. Sisteme de recurențe	27
§ 6. Sisteme de trei recurențe	35
§ 7. Recurențe definite de funcții	40
§ 8. Șiruri omografice	50
§ 9. Recurențe cu inegalități	57

CAPITOLUL II APLICAȚII ÎN ALGEBRĂ

§ 1. Puterile matricilor de ordin doi	67
§ 2. Puterile matricilor de ordin trei	74
§ 3. Probleme cu puteri ale matricilor de ordin n	81
§ 4. Probleme cu calcul de determinanți	82
§ 5. Determinări de șiruri	84
§ 6. Caracterizări ale progreseilor	85

CAPITOLUL III APLICAȚII ÎN GEOMETRIE ȘI COMBINATORICĂ

§ 1. Aplicații în geometrie	87
§ 2. Aplicații în combinatorică	99

CAPITOLUL IV APLICAȚII ÎN ANALIZĂ

§ 1. Compuneri de funcții	105
§ 2. Șiruri convergente	105
§ 3. Limite de funcții și continuitate	108
§ 4. Derivate de ordin superior	109
§ 5. Primitive	112
§ 6. Integrala definită	115

CAPITOLUL V UTILIZĂRI ALE ȘIRURILOR RECURENTE ÎN INFORMATICĂ

§ 1. Introducere în proiectarea și analiza algoritmilor	121
§ 2. Algoritmi recursivi	128
§ 3. Algoritmi de aproximare succesivă	141
§ 4. Utilizări ale șirului Fibonacci	147
§ 5. Instruire asistată de calculator	157

CAPITOLUL VI INDICAȚII PENTRU PROBLEME PROPUSE

Indicații – Capitolul I	169
Indicații – Capitolul II	177
Indicații – Capitolul IV	183

Bibliografie	191
--------------------	-----

CAPITOLUL I

ȘIRURI RECURENTE

§1. Concepte fundamentale

Fie E o mulțime. În majoritatea considerațiilor din lucrare vom admite că $E \subset \mathbb{R}$. După cum se va vedea pe parcurs, numeroase tehnici din cazul $E \subset \mathbb{R}$ se extind fără dificultate în situația când E este inclusă într-un spațiu vectorial. Acest tip de extensie este necesar pentru unele determinări efective de șiruri de numere reale (vezi I §5). O funcție $f: \mathbb{N} \rightarrow E$ definește un șir $(x_n)_{n \geq 0}$, $x_n = f(n)$, pentru $n \geq 0$. Notăm $\{f: \mathbb{N} \rightarrow E\} = E^{\mathbb{N}}$. Studiul lui $E^{\mathbb{N}}$ rezidă în evidențierea unor caracteristici ale șirurilor dintre care cităm: *mărginirea*, *monotonia*, *convergența*, *calculabilitatea* unor șiruri (finite sau nu) de termeni, *periodicitatea*.

O modalitate extrem de interesantă și de utilă în practică pentru a determina submulțimi S importante ale lui $E^{\mathbb{N}}$, constă în indicarea unei *relații de recurență* (R) și a unor *condiții inițiale* (I).

O relație de recurență poate fi dată ca o egalitate în formă implicită, explicită sau ca o inegalitate.

Forma generală implicită a unei relații de recurență este:

$$(1) F(n, x_n, x_{n-1}, \dots, x_0) = 0, \forall n \in \mathbb{N}, \text{ unde } F: \mathbb{N} \times E^{n+1} \rightarrow E; E^{n+1} = \underbrace{E \times E \times \dots \times E}_{(n+1) \text{ ori}},$$

iar forma generală explicită a unei relații de recurență este:

$$(1') x_n = f(n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_0), \forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ unde } f: \mathbb{N} \times E^n \rightarrow E.$$

Cazul extrem de important este cel al *recurențelor de ordin k* , $k \geq 1$, $k \in \mathbb{N}$; de această dată în (1) avem $F: \mathbb{N} \times E^{k+1} \rightarrow E$, în (2) avem $f: \mathbb{N} \times E^k \rightarrow E$ și

$$(2) F(n, x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}) = 0, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq k,$$

$$(2') x_n = f(n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_{n-k}), \forall n \in \mathbb{N}, n \geq k. \text{ Recurențele de ordinul } k \text{ în formă implicită și explicită mai pot fi scrise și astfel:}$$

$$(3) F(n, x_{n+k}, x_{n+k-1}, \dots, x_n) = 0, \forall n \in \mathbb{N},$$

$$(3') x_{n+k} = f(n, x_{n+k-1}, x_{n+k-2}, \dots, x_n), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Între relațiile de recurență de ordin 1 le distingem pe cele *liniare omogene*

$$(4) x_{n+1} = a_n \cdot x_n, \forall n \in \mathbb{N}, \text{ pe cele } \textit{liniare neomogene} (5) x_{n+1} = a_n \cdot x_n + b_n, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{și pe cele } \textit{omografice} (6) x_{n+1} = \frac{a \cdot x_n + b}{c \cdot x_n + d}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Definiție. Soluția generală a recurenței (3) este mulțimea șirurilor $(x_n)_{n \geq 0}$ din E care verifică (3).

Dacă șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ din E verifică (3) și sunt îndeplinite condițiile inițiale:

$$(7) x_0 = p_0, x_1 = p_1, \dots, x_{k-1} = p_{k-1}, \text{ unde } p_0, p_1, \dots, p_{k-1} \in E, \text{ fixate, atunci șirul } (x_n)_{n \geq 0} \text{ se numește } \textit{soluție particulară} \text{ a recurenței (3).}$$

Analog se definesc noțiunile de soluție generală, respectiv soluție particulară cu condițiile inițiale (7) pentru relația de recurență (3').

Șiruri recurente definite de o funcție

Definiție. Fiind dată funcția $f: E \rightarrow E$ și $x_0 \in E$, șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ definit prin

(8) $x_{n+1} = f(x_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ se numește șir recurent de ordinul întâi asociat funcției f și elementului $x_0 \in E$. Desigur, recurența definită de o funcție este un caz particular de recurență de ordin 1.

Observație. Dacă notăm $f_1 = f$, $f_2 = f \circ f$, ..., $f_n = f_{n-1} \circ f$ atunci șirul recurent definit anterior prin (8) se exprimă astfel: (8') $x_n = f_n(x_0)$, $n \geq 1$. Șirul recurent asociat lui f și x_0 se numește *șirul aproximațiilor succesive* asociate lui f și x_0 .

Mulțimea șirurilor recurente asociate funcției $f: E \rightarrow E$ și lui $x_0 \in E$, parcurgând mulțimea E , se numește mulțimea șirurilor recurente asociate lui f , iar elementele mulțimii se numesc șiruri recurente asociate funcției f sau șiruri ale aproximațiilor succesive asociate lui f și x_0 , parcurgând E . Se pune problema determinării unor clase de funcții f , pentru care șirul asociat lui f și x_0 este convergent. Dacă funcția f este discontinuă, atunci, în general șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ asociat funcției f și lui $x_0 \in E$ nu converge (vezi I §7).

Un caz particular al relației de recurență (3') este acela în care funcția f este liniară și omogenă în $x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k-1}$ și atunci (3') se scrie

$$(9) \quad x_{n+k} = a_n^1 \cdot x_{n+k-1} + a_n^2 \cdot x_{n+k-2} + \dots + a_n^k \cdot x_n, \quad k \geq 1,$$

șirurile $(a_n^i)_{n \in \mathbb{N}}$, $i = 1, k$ fiind date.

Șirul (9) se numește *șir recurent liniar și omogen*. Un caz particular al relației de recurență (9) este cazul în care coeficienții (a_n^i) sunt numere reale fixate (nu depind de n) și atunci șirul (9) se scrie sub forma

$$(9') \quad x_{n+k} = a_1 \cdot x_{n+k-1} + a_2 \cdot x_{n+k-2} + \dots + a_k \cdot x_n, \quad k \geq 1,$$

numită *relație de recurență liniară, omogenă, de ordinul k , cu coeficienți constanți*. Dacă relația de recurență are forma:

$$(10) \quad x_{n+k} = a_1 \cdot x_{n+k-1} + a_2 \cdot x_{n+k-2} + \dots + a_k \cdot x_n + b_n, \quad \text{unde } a_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, k},$$

a_i numere reale fixate și $(b_n)_{n \geq 0}$ un șir cunoscut, atunci relația (10) se numește *relație de recurență liniară și neomogenă de ordinul k* .

Întrebări de autocontrol

1. Decideți dacă următoarele egalități sunt relații de recurență; în caz afirmativ precizați o denumire a relației de recurență.

- | | |
|--|---|
| a) $x_{n+1} = n \cdot x_n, \quad \forall n \in \mathbb{N};$ | b) $x_{n+1} = 3x_n + n, \quad \forall n \in \mathbb{N};$ |
| c) $x_{2n} = 2x_n + 3, \quad \forall n \in \mathbb{N};$ | d) $x_n = x_{n+1} + x_{n+2}, \quad \forall n \in \mathbb{N};$ |
| e) $x_n = \begin{cases} 2x_p & \text{dacă } n = 2p \\ 3x_p & \text{dacă } n = 2p+1 \end{cases};$ | f) $x_{2n} = x_n^2 \text{ și } x_{3n} = x_n^3, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$ |

2. Pentru funcții $F: M \rightarrow M$, concepeți $f_n = f_{n-1} \circ f$ drept o relație de recurență pentru șiruri (nenumerece).

3. Analizați dacă prin precizarea unui număr finit de condiții inițiale egalitățile $x_{2n} = x_{n+1} + x_n - 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$ $x_{3n} = x_{n+1} + x_n + x_{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$ $x_{3n+1} = x_{2n+1} + x_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ definesc sau nu un șir.

Indicație. Se determină $x_1 = 1$. Explicitând x_{6m} se obține $x_{2m+1} = 2x_m - 1$.

§2. Teoreme de existență și unicitate

Scopul acestui paragraf este de a ne asigura în condiții de mare generalitate de existența unor șiruri definite recursiv. Pentru majoritatea exemplelor prezentate aici vom reveni ulterior cu determinarea efectivă a termenului general.

Teorema 1. Fie E o mulțime și un șir de funcții $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}, f_n: E^n \rightarrow E$ (facem convenția $E^0 = E^1 = E$); atunci există un singur șir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, x_n \in E, \forall n \in \mathbb{N}$ astfel încât (1) $x_0 = p$ și (2) $x_{n+1} = f_n(x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0), \forall n \in \mathbb{N}$.

Demonstrație. Notăm

$$E_0 = \{p\}, \dots, E_n = \{x \in E / x = f_{n-1}(x_{n-1}, \dots, x_1, x_0), x_k \in E_k, k = \overline{0, n-1}\}$$

dacă $n \geq 1$.

Fie propoziția $\rho(n)$: „ E_n posedă un singur element”.

Demonstrația o facem prin inducție completă. Evident $\rho(0)$ este adevărată, deoarece $E_0 = \{p\}$. Dacă pentru orice $k \leq n$ mulțimile E_k posedă un singur element, atunci fie $E_n = \{x_n\}$. Rezultă că mulțimea E_{n+1} posedă un singur element, și anume $x_{n+1} = f_n(x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0)$. Rezultă că oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, E_n posedă un singur element x_n .

Șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definit astfel, satisface condițiile (1) și (2) din teorema 1, ceea ce demonstrează existența și unicitatea șirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exemple: 1) Fiind dat șirul de numere reale $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, astfel încât

$$1^\circ x_0 = 1, 2^\circ x_{n+1} = x_n + x_{n-1} + \dots + x_1 + x_0, \quad n \geq 0, \text{ putem alege}$$

$$f_n(x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0) = x_n + x_{n-1} + \dots + x_1 + x_0$$

și conform teoremei 1 există un singur șir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ce satisface condițiile date.

Evident, pentru $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = 2^{n-1}$.

2) Fie șirul de numere reale $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, astfel încât

$$1^\circ y_0 = 1, 2^\circ y_{n+1} = y_n \cdot y_{n-1} \cdot \dots \cdot y_1 \cdot y_0, \quad n \geq 0, \text{ unde}$$

$$f_n(y_n, y_{n-1}, \dots, y_1, y_0) = y_n \cdot y_{n-1} \cdot \dots \cdot y_1 \cdot y_0$$

și conform teoremei 1 există un singur șir $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ce satisface condițiile date. Se constată ușor că pentru $n \in \mathbb{N}^*$ are loc $y_n = 2^{1/n}$, șirul x_n fiind cel din exemplul precedent.

Teorema 2. Fie E o mulțime și un șir de funcții $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funcții $f_n: E \rightarrow E$. Există un singur șir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, x_n \in E \quad \forall n \in \mathbb{N}$ care satisface condițiile:

$$(3) x_0 = p; (4) x_{n+1} = f_n(x_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Demonstrație. Fie $E_0 = \{p\}$ și $E_n = \{x \in E / x = f_{n-1}(x_{n-1})\}, n \geq 1$.

Fie propoziția $\rho(n)$: „Mulțimea E_n posedă un singur element”.

Demonstrația se face prin inducție completă. $\rho(0)$ este adevărată căci $E_0 = \{p\}$. Dacă pentru orice $k \leq n$, mulțimile E_k posedă un singur element, atunci fie $E_n = \{x_n\}$. Rezultă că mulțimea E_{n+1} are un singur element și anume pe $x_{n+1} = f_n(x_n)$, deci oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, E_n posedă un singur element x_n . Șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definit astfel satisface condițiile (3) și (4), deci este demonstrată existența și unicitatea șirului.

Exemple : 1) Fie şirul de numere reale $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, astfel încât (1) $x_0 = p$ şi (2) $x_{n+1} = x_n + r$, $n \in \mathbb{N}$. Se observă că în acest caz $f_n(x_n) = x_n + r$. Ținând seama de teorema 2, rezultă că şirul care satisface condițiile date există și este unic. Şirul poartă numele de *progresie aritmetică* și este dat de $x_n = p + nr$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2) Fie şirul de numere reale $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, astfel încât (1) $x_0 = p$ şi (2) $x_{n+1} = a \cdot x_n$, $n \in \mathbb{N}$, cu $a \neq 0$. Se observă că luând $f_n(x_n) = a \cdot x_n$, sunt îndeplinite condițiile teoremei 2, deci şirul ce satisface condițiile date există și este unic. Şirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ poartă numele de *progresie geometrică* și este dat de $x_n = p \cdot a^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

3) Fie şirul de numere reale $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, astfel încât (1) $x_0 = p$ şi (2) $x_{n+1} = a \cdot x_n + b$, $\forall n \in \mathbb{N}$ și $a \neq 0$ și $a \neq 1$. Luând $f_n(x_n) = a \cdot x_n + b$, conform teoremei 2 există și este unic un şir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ care îndeplinește condițiile date.

4) Fie şirul de numere reale $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, astfel încât (1) $x_0 = 0$ şi (2) $x_{n+1} = x_n + n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Se observă că în acest caz $f_n(x_n) = x_n + n$ și atunci conform teoremei 2, există un singur şir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ care satisface condițiile date.

Teorema 3. Fie E o mulțime și un şir de funcții $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $f_n : E \rightarrow E$. Există un singur şir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, unde $x_n \in E$, $\forall n \in \mathbb{N}$ astfel încât:

(5) $x_0 = p_0$, $x_1 = p_1$, $x_2 = p_2$, ..., $x_{k-1} = p_{k-1}$, $k \geq 2$ (6) $x_{n+k} = f_n(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Demonstrație. $E_0 = \{p_0\}$, $E_1 = \{p_1\}$, ..., $E_{k-1} = \{p_{k-1}\}$ și

$E_n = \{x \in E / x = f_{n-k}(x_{n-k}), x_{n-k} \in E_{n-k}\}$, pentru $n \geq k$.

Fie propoziția $\rho(n)$: „Mulțimea E_n posedă un singur element”.

Propozițiile $\rho(0), \rho(1), \dots, \rho(k-1)$ sunt adevărate căci $E_0 = \{p_0\}$,

$E_1 = \{p_1\}$, ..., $E_{k-1} = \{p_{k-1}\}$. Dacă mulțimea E_n posedă un singur element x_n , atunci mulțimea E_{n+k} posedă un singur element $x = f_n(x_n)$.

Așadar, implicația $\rho(n) \Rightarrow \rho(n+k)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Pe baza inducției complete, rezultă că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, mulțimea E_n posedă un singur element x_n și cum acest şir satisface condițiile (5) și (6) am demonstrat teorema.

Exemple : 1) Fie şirul de numere reale $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definite astfel: 1° $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, 2° $x_{n+2} = x_n + 2$, $n \in \mathbb{N}$, unde $f_n(x_n) = x_n + 2$, $k = 2$. Se observă că $x_n = n + 1$ satisface condițiile date și pe baza teoremei 3 rezultă că şirul $x_n = n + 1$, $n \in \mathbb{N}$ este unic.

2) Fie şirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de numere reale astfel încât: 1° $x_0 = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, 2° $x_{n+3} = x_n + n$, $n \in \mathbb{N}$, unde $f_n(x_n) = x_n + n$ și $k = 3$. Având îndeplinite condițiile teoremei 3, rezultă că există un şir unic $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ce satisface condițiile date.

Teorema 4. Fie E o mulțime și un şir de funcții $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $f_n : E^k \rightarrow E$, unde $k \geq 2$. Există un singur şir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ astfel încât:

(7) $x_0 = p_0$, $x_1 = p_1$, $x_2 = p_2$, ..., $x_{k-1} = p_{k-1}$, $k \geq 2$ și

(8) $x_{n+k} = f_n(x_{n+k-1}, x_{n+k-2}, \dots, x_{n+1}, x_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Demonstrație. Fie $E_0 = \{p_0\}$, $E_1 = \{p_1\}$, ..., $E_{k-1} = \{p_{k-1}\}$ și

$E_n = \{x \in E / x = f_{n-k}(x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_{n-k+1}, x_n), x_{n-k} \in E_{n-k}, \dots, x_{n-1} \in E_{n-1}\}$, pentru $n \geq k$.

Fie propoziția $\rho(n)$: „Mulțimea E_n posedă un singur element”.

Propozițiile $\rho(0), \rho(1), \dots, \rho(k-1)$ sunt adevărate.

Dacă propozițiile $\rho(n), \rho(n+1), \dots, \rho(n+k-1)$ sunt adevărate, adică mulțimile $E_n, E_{n+1}, \dots, E_{n+k-1}$ posedă câte un singur element și anume $E_n = \{x_n\}$, $E_{n+1} = \{x_{n+1}\}$, ..., $E_{n+k-1} = \{x_{n+k-1}\}$ atunci mulțimea E_{n+k} posedă un singur element $x_{n+k} = f_n(x_{n+k-1}, \dots, x_{n-2}, x_{n-1})$.

Deci implicația $\rho(n) \wedge \rho(n+1) \wedge \dots \wedge \rho(n+k-1) \Rightarrow \rho(n+k)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Rezultă din inducția completă că E_n posedă un singur element x_n . Şirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisface condițiile (7), (8) deci teorema este demonstrată.

Exemple: 1) Fie şirul de numere reale $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, astfel încât: 1° $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ și 2° $x_{n+2} = \frac{x_{n+1} + x_n}{2}$, $n \in \mathbb{N}$. Conform teoremei 4 (unde $k=2$ și $f_n(u,v) = \frac{u+v}{2}$),

există un singur şir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ care satisface condițiile date.

2) Fie şirul de numere reale $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, astfel încât: 1° $x_0 = 1$, $x_1 = 1$ și 2° $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$, $n \in \mathbb{N}$, unde $f_n(x_{n+1}, x_n) = x_{n+1} + x_n$. Conform teoremei 4 ($k = 2$), există un singur şir ce satisface condițiile date. Şirul ce satisface cele două condiții se numește *şirul lui Fibonacci*.

3) Fie şirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de numere reale, pentru care:

1° $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ și 2° $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n + n^2$, $n \in \mathbb{N}$.

Conform teoremei 4, (unde $f_n(x_{n+1}, x_n) = x_{n+1} + x_n + n^2$, $k = 2$) există un singur şir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ce satisface condițiile date.

Observații. 1) Dacă printr-un procedeu oarecare putem intui termenul general, sau dacă enunțul problemei cere să se arate că termenul general are o anumită formă, atunci se demonstrează că termenul general găsit sau indicat este cel căutat, verificându-se numai că sunt îndeplinite cele două condiții din una din cele patru teoreme. Teoremele corespunzătoare ne asigură unicitatea şirului ce satisface condițiile teoremei respective.

2) În asigurarea unicității şirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, un rol esențial îl joacă faptul că relația prin care se exprimă termenul general în funcție de termenii precedenți este o relație funcțională. Dacă această relație nu mai este funcțională și condițiile impuse şirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sunt compatibile, atunci există în general mai multe şiruri $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ care satisfac condițiile date.

Exemplu. Fie şirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, astfel încât: 1° $x_0 = 0$ și 2° $|x_{n+1}| = |x_n| + 1$, $n \in \mathbb{N}$.

Se observă că şirurile $(n)_{n \in \mathbb{N}}$ și $(-n)_{n \in \mathbb{N}}$ îndeplinesc cele două condiții. Evident relația $|x_{n+1}| = |x_n| + 1$ nu este o relație funcțională.

3) Dacă şirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este dat prin alte condiții decât cele date în teoremele 1, 2, 3, 4, atunci neavând asigurate existența și unicitatea şirului se procedează astfel: I. Dând valori particulare lui n se intuiește o anumită formă a termenului general. II. Se verifică îndeplinirea condițiilor de şirul cu termenul general preconizat III. Se demonstrează unicitatea şirului.

Exemplu. Să se determine șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ce satisface $1^\circ x_0 = 1, x_1 = 2$ și

$2^\circ x_{n+2} = \sqrt{2(x_{n+1})^2 - (x_n)^2}$. Se determină rapid $x_2 = \sqrt{7}, x_3 = \sqrt{10}, x_4 = \sqrt{13}, x_5 = 4 = \sqrt{16}$ și se bănuiește formula $(*) x_n = \sqrt{3n+1}$. Se constată ușor că $(*)$ verifică cele două condiții. Punând apoi $x_n = \sqrt{3n+1} + y_n$ se constată că șirul $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ trebuie să verifice condițiile $1' y_0 = 0 = y_1$ și $2' y_{n+2} = y_{n+1} + y_n$.

Aceste condiții se încadrează în teorema 4 și soluția evidentă $y_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ este și unică. Se deduce astfel unicitate lui $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Probleme propuse

1. Se dă șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}, a_n = \frac{n^2+1}{n}$. Se cere să se determine o relație de recurență de tipul $a_{n+2} = F(a_{n+1}, a_n)$. D.B.

2. Pentru un șir $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sunt îndeplinite pentru orice $n \in \mathbb{N}$ relațiile de recurență $a_{2n} = 5a_n - a_{n+1} - 1$ și $(\beta_n) a_{2n+1} = a_{n+1} + 3a_n - 3$. Să se constate că există un unic șir $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ și că pentru $n \in \mathbb{N}^*$ are loc $(\gamma_n) a_{n^2} = a_n \cdot a_{n-1}$. D.B.

3. Să se determine șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ce satisface condițiile inițiale $x_1 = 2, x_2 = \frac{5}{2}$ și (pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$): $(R) x_{n+2}(3+2x_n - x_{n+1}) = x_n \cdot x_{n+1} + 3x_n + 4$.

§3. Recurențe liniare de ordinul I

a) Șiruri date prin

$$(1) \begin{cases} x_{n+1} = ax_n + b \\ x_0 = p \end{cases}, n \in \mathbb{N}, a, b, p \in \mathbb{R}.$$

Existența și unicitatea șirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ care satisface condițiile (1) sunt asigurate de teorema 2 (I §2).

Se pune acum problema determinării termenului general al șirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dat prin (1). Pentru cazurile particulare:

$a=1, b \neq 0$ șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este progresie aritmetică și $x_n = p + nb$.

$a=0$, atunci $x_n = b, n \geq 1$ și $x_0 = p$.

$a=1, b=0$ șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este constant $x_{n+1} = x_n = p$.

$a \neq 0, a \neq 1, b=0$ șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este o progresie geometrică de rație a .

În cazul generic ($0 \neq a \neq 1$ și $b \neq 0$) se utilizează în principal următoarele două metode:

Metoda 1 (a simplificării relației de recurență)

Se determină un $y \in \mathbb{R}$ astfel încât $x_{n+1} + y = a(x_n + y)$.

Din relația de recurență avem:

$$\left. \begin{aligned} x_1 + y &= a(x_0 + y) \\ x_1 &= ax_0 + b \end{aligned} \right\} \Rightarrow y = \frac{b}{a-1}.$$

Notând cu $t_n \equiv x_n + y$ se obține: $t_{n+1} = a \cdot t_n$ care este progresie geometrică, deci $t_n = a^n \cdot t_0$ de unde rezultă $x_n + y = a^n(p + y)$ sau

$$(1') x_n = a^n \left(p + \frac{b}{a-1} \right) - \frac{b}{a-1}.$$

Metoda 2 (a eliminării termenilor intermediari)

Se dau lui n valori particulare în relația de recurență; se amplifică prin puteri descrescătoare ale lui a : $a^{n-1} / x_1 = ax_0 + b$; $a^{n-2} / x_2 = ax_1 + b$; $a^{n-3} / x_3 = ax_2 + b$; ...; $a / x_{n-1} = ax_{n-2} + b$; $x_n = ax_{n-1} + b$. După adunare și reduceri de termeni se obține: $x_n = a^n x_0 + b(1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1})$ de unde rezultă (1').

Observație. Pentru șirurile ce satisfac (1) sau (1') se utilizează și denumirea de *progresii aritmetico-geometrice*.

Exemple: 1) Să se exprime x_n în funcție de n , dacă: $x_0 = 0, x_{n+1} = 2x_n + 1, n \in \mathbb{N}$.

Se obține $x_n = 2^n - 1$.

2) Să se exprime x_n în funcție de n , dacă: $x_0 = 1, x_{n+1} = 3x_n + 1, n \in \mathbb{N}$.

Se obține $x_n = \frac{3}{2} \cdot 3^n - \frac{1}{2}$.

3) Să se determine forma termenului general al șirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dat prin:

$$x_0 = 0, x_{n+1} = -\frac{1}{2}x_n + 1, n \in \mathbb{N}. \text{ Se obține } x_n = \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{3}.$$

b) Șiruri date prin (2) $\begin{cases} x_{n+1} = a \cdot x_n + f(n), n \in \mathbb{N} \\ x_0 = p \end{cases}$

unde $a, p \in \mathbb{R}, a \neq 0$ și $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

Teorema 1. Dacă șirul $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisface condițiile $y_{n+1} = a \cdot y_n, \forall n \in \mathbb{N}$ și $y_0 = 1$, iar șirul $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisface condițiile $z_{n+1} = a \cdot z_n + f(n), z_0 = f(0)$ atunci șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dat prin $x_n = c \cdot y_n + z_n$, unde $c = p - z_0$ verifică condițiile (2).

Demonstrație. Faptul că există un singur șir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ce satisface condițiile (2) este dat de teorema 2 (I §2).

Evident $y_n = a^n$ și $x_{n+1} = c \cdot y_{n+1} + z_{n+1} = cay_n + az_n + f(n) = a(cy_n + z_n) + f(n) = a \cdot x_n + f(n)$ și $x_0 = ca^0 + z_0$, adică $c = p - z_0$, deci șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ astfel definit verifică condițiile (2).

Observație. Soluția generală a relației $x_{n+1} = a \cdot x_n + f(n), \forall n \in \mathbb{N}$ este suma dintre soluția generală a relației omogene, adică un șir $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cu $y_{n+1} = a \cdot y_n, \forall n \in \mathbb{N}$ și o soluție particulară a relației neomogene, adică un șir $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cu $z_{n+1} = a \cdot z_n + f(n), \forall n \in \mathbb{N}$.

Un caz particular relativ frecvent întâlnit este furnizat de situația când există o constantă α și un polinom nenul P încât $f(n) = \alpha^n \cdot P(n)$.

Se caută soluția condițiilor $z_{n+1} = a \cdot z_n + f(n)$ dată de $z_n = \alpha^n \cdot Q(n)$, precizând pentru moment doar: Q este polinom nenul. Relația de recurență revine rapid la $(*) \alpha \cdot Q(n+1) - a \cdot Q(n) = P(n)$.

Din acest moment apare o alternativă:

(i) Dacă $\alpha = a$, (*) determină un polinom Q de grad cu o unitate mai mare decât gradul lui P fără a preciza termenul liber.

$$P(x) = \sum_{k=0}^g c_k x^k \Rightarrow Q(x) = C + \int_0^x P(t) dt = C + \sum_{k=0}^g \frac{c_k}{k+1} x^{k+1}.$$

Evident termenul liber este determinat de condiția inițială $x_0 = p \Rightarrow C = p$.

(ii) Dacă $\alpha \neq a$, condiția (*) determină în mod unic polinomul Q de grad egal cu al lui P (determinarea coeficienților începând cu cel de grad maxim).

Exemple: 1) Să se studieze convergența șirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dat prin $x_0 = 1$,

$$x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + \left(\frac{1}{2}\right)^n, n \geq 0.$$

Soluție. Soluția particulară z_n a relației date trebuie să fie de forma

$$z_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot (\alpha n + \beta).$$

Se obține deci $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \cdot [\alpha(n+1) + \beta] = \frac{2}{3} \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n (\alpha n + \beta)\right] + \left(\frac{1}{2}\right)^n$ și prin

metoda coeficienților nedeterminați se obține $\alpha = -6$, $\beta = 9$, deci

$$z_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot (-6n + 9).$$

Soluția y_n a relației liniar omogene $y_{n+1} = \left(\frac{2}{3}\right)y_n$ este $y_n = c \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Deci

$x_n = c \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot (-6n + 9)$ și din $x_0 = 1$ se obține $c = -\frac{27}{4}$, deci

$x_n = -\frac{27}{4} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot (-6n + 9)$, de unde rezultă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

2) Fie șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ definit prin $x_0 = 1$ și $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \left(\frac{1}{2}\right)^n, \forall n \geq 0$.

Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, studiind mai întâi convergența șirului.

Soluție. Soluția particulară z_n a ecuației are forma $z_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot n(\alpha n + \beta)$ și cum

$z_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \cdot (n+1)(\alpha n + \alpha + \beta)$ și $z_{n+1} = \frac{1}{2}z_n + \left(\frac{1}{2}\right)^n$, folosind metoda

coeficienților nedeterminați se obține $\alpha = 1$ și $\beta = -1$, deci $z_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot n(n-1)$.

Soluția generală a ecuației omogene are forma $y_n = c \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$ și cum $x_n = y_n + z_n$,

deci $x_n = c \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot n(n-1)$; deoarece $x_0 = 1$, se obține $c = 1$, de unde

$x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot n^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot n$. Acum este evident că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

c) Șiruri date prin (3) $\begin{cases} x_{n+1} = a_n \cdot x_n + b_n, \forall n \in \mathbb{N} \\ x_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$

unde $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sunt șiruri de numere reale date.

Teorema 2. Dacă $(x_n)_{n \geq 0}$ este dat prin relația $x_{n+1} = a_n x_n + b_n, \forall n \in \mathbb{N}, x_0 \in \mathbb{R}$ cu

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ șiruri reale date, $a_n \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}$ atunci

$$x_{n+1} = a_0 a_1 \dots a_n x_0 + \left(\sum_{k=0}^{n-1} b_k a_{k+1} a_{k+2} \dots a_n \right) + b_n.$$

Vom da două metode de demonstrație:

Metoda 1. Căutăm o soluție a relației (3) de forma $x_{n+1} = a_0 a_1 a_2 \dots a_n c_{n+1}$ unde $c_0 = x_0$, urmând ca pe c_n să îl determinăm punând condiția ca $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ să verifice relația (3). Această metodă este cunoscută sub numele de *metoda variației constantelor* sau *metoda lui Lagrange* și este folosită în teoria ecuațiilor diferențiale liniare. Avem atunci $a_0 a_1 a_2 \dots a_n c_{n+1} = a_0 a_1 a_2 \dots a_n c_n + b_n$, deci

$c_{n+1} - c_n = \frac{b_n}{a_0 a_1 \dots a_n}$, de unde dând lui n valori particulare și sumând se obține:

$$c_{n+1} = c_0 + \frac{b_0}{a_0} + \frac{b_1}{a_0 a_1} + \frac{b_2}{a_0 a_1 a_2} + \dots + \frac{b_n}{a_0 a_1 \dots a_n}$$

de unde rezultă $x_{n+1} = a_0 a_1 \dots a_n c_{n+1} =$

$$= a_0 a_1 a_2 \dots a_n x_0 + b_0 a_1 a_2 \dots a_n + b_1 a_2 a_3 \dots a_n + \dots + b_{n-1} a_n + b_n.$$

Metoda 2. Dând lui n valori particulare în relația (1) se obține:

$$\begin{array}{l|l} a_n \dots a_1 & x_1 = a_0 x_0 + b_0 \\ a_n a_{n-1} \dots a_3 a_2 & x_2 = a_1 x_1 + b_1 \\ a_n a_{n-1} \dots a_3 & x_3 = a_2 x_2 + b_2 \\ \dots & \dots \end{array}$$

$$a_n \mid x_n = a_{n-1} x_{n-1} + b_{n-1}$$

$$x_{n+1} = a_n x_n + b_n$$

$$x_{n+1} = a_0 a_1 \dots a_n x_0 + b_0 a_1 \dots a_n + b_1 a_2 a_3 \dots a_n + \dots + b_{n-1} a_n + b_n.$$

Teorema 3. Fie $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cu $|a_n| \in (0, 1), |a_n| \rightarrow a \in [0, 1), b_n \rightarrow 0$.

Dacă $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ verifică relația de recurență $x_{n+1} = a_n x_n + b_n, \forall n \in \mathbb{N}$, atunci $x_n \rightarrow 0$.

Demonstrație. Fie $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ șirul $c_1 = a_0, c_2 = a_0 a_1, \dots, c_{n+1} = a_0 a_1 \dots a_n$. Se

observă că $\frac{c_{n+1}}{c_n} = a_n$ și $x_{n+1} = c_{n+1} x_0 + c_{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{b_k}{a_0 a_1 \dots a_k} = c_{n+1} x_0 +$

$$+ c_{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{b_k}{c_{k+1}} = c_{n+1} \left(x_0 + \sum_{k=0}^n \frac{b_k}{c_{k+1}} \right).$$

Cum $\left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = |a_n| \in (0, 1)$, rezultă că $0 < |c_{n+1}| < |c_n|$, deci șirul $(|c_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ este strict descrescător și mărginit inferior. Conform teoremei lui Weierstrass rezultă că șirul are limită. Fie $\lim_{n \rightarrow \infty} |c_n| = l$.

Dacă $l \neq 0$, ar rezulta că $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|$, absurd deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = a \in [0, 1)$, deci $\lim_{n \rightarrow \infty} |c_n| = 0$ și cum $(|c_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ este strict descrescător și cu termeni nenuli și convergent la zero rezultă că șirul $\left(\frac{1}{|c_n|} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ este strict crescător și are limita $+\infty$. Din $x_{n+1} = c_{n+1} \left(x_0 + \sum_{k=0}^n \frac{b_k}{c_{k+1}} \right)$ deducem că $|x_{n+1}| \leq |c_{n+1}| \left(|x_0| + \sum_{k=0}^n \frac{|b_k|}{|c_{k+1}|} \right)$. Prin trecere la limită obținem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |c_{n+1}| \left(|x_0| + \sum_{k=0}^n \frac{|b_k|}{|c_{k+1}|} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_0| + \sum_{k=0}^n \frac{|b_k|}{|c_{k+1}|}}{\frac{1}{|c_{n+1}|}}$$

și cum $\frac{1}{|c_{n+1}|}$ este strict crescător și nemărginit superior, putem aplica teorema lui Stolz, deci

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} |c_{n+1}| \left(|x_0| + \sum_{k=0}^n \frac{|b_k|}{|c_{k+1}|} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{|b_{n+1}|}{|c_{n+2}|}}{\frac{1}{|c_{n+2}|} - \frac{1}{|c_{n+1}|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|b_{n+1}|}{1 - \frac{|c_{n+2}|}{|c_{n+1}|}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|b_{n+1}|}{1 - |a_{n+1}|} = \frac{b}{1-a} = 0 \text{ unde } 0 = b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n. \end{aligned}$$

Deoarece $0 \leq |x_n| \leq |c_{n+1}| \left(|x_0| + \sum_{k=0}^n \frac{|b_k|}{|c_{k+1}|} \right)$ conform criteriului intercalării

rezultă că $|x_n| \rightarrow 0$.

Teorema 4. Dacă $a, b > 0$ cu $b \in (0, a)$, atunci pentru orice șir de numere reale $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ are loc echivalența: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (ax_{n+1} + bx_n) = 0$.

Demonstrație. $\Rightarrow$: Dacă $x_n \rightarrow 0$ atunci $ax_{n+1} + bx_n \rightarrow 0$ evident.

$\Leftarrow$: Dacă $ax_{n+1} + bx_n \rightarrow 0$, notând cu $y_n = ax_{n+1} + bx_n$, $a \neq 0$ rezultă că

$$x_{n+1} = -\frac{b}{a}x_n + \frac{1}{a}y_n.$$

Suntem în condițiile teoremei precedente în care $|a_n| = \left| \frac{b}{a} \right| \in (0, 1)$,

$|a_n| \rightarrow \left| \frac{b}{a} \right| \in (0, 1)$, iar $|b_n| = \frac{1}{a}|y_n| \rightarrow 0$ deci $|x_n| \rightarrow 0$, adică $x_n \rightarrow 0$.

d) Exerciții propuse

1) Fie șirul $(x_n)_{n \geq 0}$, definit prin $x_0 = 0$ și $x_{n+1} = -\frac{1}{2}x_n + 1$, $n \geq 0$.

Să se arate că șirul este convergent și să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

2) Fie șirul $(x_n)_{n \geq 0}$, definit prin: $x_{n+1} = x_n + n$, $n \geq 0$. Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$.

3) Să se studieze convergența șirului $(x_n)_{n \geq 0}$, definit prin:

a) $x_0 = 3$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + 3$, $\forall n \geq 0$; b) $x_0 = 1$, $x_{n+1} = 2x_n - 1$, $\forall n \geq 0$.

4) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel ca șirul $(x_n)_{n \geq 0}$, definit prin $x_{n+1} = ax_n + 1$, $n \geq 0$, $x_0 = \frac{1}{2}$ să fie convergent.

5) Să se arate că șirurile următoare sunt divergente:

a) $x_0 = 1$, $x_{n+1} = -\frac{1}{2}x_n + (-1)^n$, $n \geq 0$; b) $x_0 = 0$, $x_{n+1} = -x_n + 2$, $n \geq 0$.

6) Fie șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ definit prin $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \left(\frac{1}{2}\right)^n$, $n \geq 0$ cu $x_0 = -1$.

Să se arate că șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este convergent și să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

7) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel ca șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ definit prin $x_{n+1} = ax_n + b^n$, $\forall n \geq 0$ unde $x_0 = 1$ să fie convergent.

8) Știind că $\forall n \geq 0$, $x_{n+1} = -\frac{1}{2}x_n + 3n \cdot 2^{-n}$ să se arate că șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent.

9) Știind că șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisface relația de recurență $x_{n+1} = ax_n + 2^{-n} \cdot n^2$, să se spună pentru ce valori ale lui $a \in \mathbb{R}$ șirul este convergent.

10) Dacă p este număr prim, atunci între primii p termeni ai șirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ce satisface $x_1 = p$ și $x_{n+1} = 2x_n + 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ există măcar un termen ce nu este prim.

11) (Constanta lui Euler) Se consideră șirurile $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(y_n)_{n \geq 2}$, $(z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(t_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ce satisfac condițiile inițiale $x_1 = 1$, $y_2 = \frac{3}{2 \ln 2}$, $z_0 = 1$, $t_1 = 1$ și relațiile

$$\text{de recurență } x_{n+1} = x_n + \frac{1}{n+1} - \ln \frac{n+1}{n}, \quad y_{n+1} = \frac{\ln n}{\ln(n+1)} \left(y_n + \frac{1}{n+1} \right),$$

$$z_{n+1} = z_n + \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2} \ln \frac{2n+3}{2n+1}, \quad t_{n+1} = t_n + \frac{1}{(n+1)(2n+3)}.$$

a) Să se demonstreze că toate aceste patru șiruri sunt convergente.

b) Notând $c = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ (c se numește constanta lui Euler) să se determine limitele celorlalte trei șiruri.

§4. Recurențe liniare de ordin $k \geq 2$

a) Recurențe liniare omogene, constante de ordin 2

Fie șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ definit prin:

$$(1) x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}, a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0 \text{ și}$$

$$(2) x_0 = p_0, x_1 = p_1, \text{ unde } p_0, p_1 \in \mathbb{R}.$$

Conform teoremei 4 (I §2), există un singur șir care satisface (1) și (2). Pentru a determina șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ definit prin relația de recurență liniară de ordinul doi cu coeficienți constanți (1) și condiția (2), se folosesc următoarele teoreme ajutătoare:

Teorema 1. Dacă șirurile $(\alpha_n)_{n \geq 0}$ și $(\beta_n)_{n \geq 0}$ îndeplinesc condiția (1), atunci șirul cu termenul general $c_1 \alpha_n + c_2 \beta_n$ îndeplinește aceeași condiție.

Demonstrație. Deoarece $\alpha_{n+2} = a\alpha_{n+1} + b\alpha_n$ și $\beta_{n+2} = a\beta_{n+1} + b\beta_n$ rezultă

$$c_1 \alpha_{n+2} + c_2 \beta_{n+2} = a(c_1 \alpha_{n+1} + c_2 \beta_{n+1}) + b(c_1 \alpha_n + c_2 \beta_n).$$

Teorema 2. Dacă α este o rădăcină a ecuației $r^2 = ar + b$, atunci α^n satisface relația (1).

Demonstrație. Cum $\alpha^2 = a \cdot \alpha + b$, amplificând cu α^n se obține

$$\alpha^{n+2} = a \cdot \alpha^{n+1} + b \cdot \alpha^n \text{ c.c.t.d.}$$

Definiție. Ecuația (3) $r^2 = ar + b$ se numește *ecuația caracteristică* asociată relației de recurență (1).

Teorema 3. Dacă ecuația caracteristică $r^2 = ar + b$ are rădăcini reale, distincte

$$r_1, r_2 \text{ atunci sistemul } \begin{cases} c_1 + c_2 = p_0 \\ c_1 \cdot r_1 + c_2 \cdot r_2 = p_1 \end{cases} \text{ admite soluție unică.}$$

Demonstrație. Deoarece $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{vmatrix} = r_2 - r_1 \neq 0$, conform teoremei lui Cramer rezultă că sistemul are soluție unică.

Teorema 4. Dacă ecuația caracteristică $r^2 = ar + b$ admite o rădăcină dublă α , atunci șirul cu termenul general $n \cdot \alpha^n$ satisface condiția (1).

Demonstrație. În ipotezele preconizate

$$(n+2)\alpha^2 - a(n+1)\alpha - bn = n(\alpha^2 - a\alpha - b) + \alpha(2\alpha - a) = 0.$$

Amplificând prin α^n deducem concluzia.

Teorema 5. Dacă ecuația caracteristică $r^2 = ar + b$ admite o rădăcină dublă α ,

atunci sistemul $\begin{cases} c'_1 = p_0 \\ c_1 \cdot \alpha + c_2 \cdot \alpha = p_1 \end{cases}$ are soluție unică.

Demonstrație. Deoarece $b \neq 0$ rezultă $\alpha \neq 0$ și atunci $c_1 = p_0$ și $c_2 = \frac{p_1 - p_0 \cdot \alpha}{\alpha}$.

Teorema 6. Dacă ecuația $r^2 = ar + b$ are două rădăcini reale distincte r_1 și r_2 , atunci șirul care satisface condițiile (1) și (2) are termenul general de forma

(4) $x_n = c_1 \cdot r_1^n + c_2 \cdot r_2^n$, unde c_1 și c_2 se determină în mod unic din condițiile inițiale.

Demonstrație. Din teorema 2 rezultă că r_1^n și r_2^n verifică condiția (1) și din teorema 1 rezultă $x_n = c_1 \cdot r_1^n + c_2 \cdot r_2^n$ verifică condiția (1).

Relațiile $x_0 = p_0$ și $x_1 = p_1$ determină unic c_1, c_2 prin teorema 3.

Teorema 7. Dacă ecuația caracteristică $r^2 = ar + b$ admite o rădăcină dublă α , atunci șirul care satisface condițiile (1) și (2) are termenul general de forma

(5) $x_n = c_1 \cdot \alpha^n + c_2 \cdot n \cdot \alpha^n$, unde c_1 și c_2 se determină în mod unic din condițiile inițiale.

Demonstrație. Din teoremele 1, 2 și 4 rezultă că șirul cu termenul general

$$x_n = c_1 \cdot \alpha^n + c_2 \cdot n \cdot \alpha^n \text{ satisface condiția (1).}$$

Relațiile $x_0 = p_0$ și $x_1 = p_1$ determină c_1, c_2 conform teoremei 5.

Exemple. 1) Să se determine șirul $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ astfel încât: $1^\circ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$,

$n \in \mathbb{N}$; $2^\circ F_0 = 1, F_1 = 1$ (șirul lui Fibonacci).

Soluție. Ecuația caracteristică asociată șirului este $r^2 = r + 1$ și are rădăcinile

$$r_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, r_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \text{ Șirul are termenul general de forma}$$

$$F_n = c_1 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n + c_2 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n, \quad \text{condițiile inițiale impunând}$$

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2}, c_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{2} \text{ rezultă importanta formulă a lui Binet:}$$

$$(F) \quad F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right].$$

2) Să se determine șirul $(L_n)_{n \geq 0}$, definit prin: $1^\circ L_{n+2} = L_{n+1} + L_n, n \in \mathbb{N}$;

$2^\circ L_0 = 2, L_1 = 1$ (șirul lui Lucas). Procedând ca la exemplul 1 se obține

$$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

3) Să se determine șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, astfel încât

$$1^\circ x_{n+2} = 4x_{n+1} - 4x_n, n \in \mathbb{N}; \quad 2^\circ x_0 = 1, x_1 = 2.$$

Soluție. Ecuația caracteristică $r^2 = 4r - 4$ are rădăcina dublă $\alpha = 2$, deci șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ are termenul general definit prin $x_n = c_1 \cdot 2^n + c_2 \cdot n \cdot 2^n$ unde $c_1 = 1$ și $2c_1 + 4c_2 = 2$. Rezultă $x_n = 2^n$.

Teorema 8. Dacă ecuația caracteristică $r^2 = ar + b$, cu $\Delta < 0$ are rădăcinile $r_1 = R(\cos t + i \sin t)$, $r_2 = R(\cos t - i \sin t)$ atunci șirul care satisface condițiile (1) și (2) are termenul general de forma (6) $x_n = R^n (c_1 \cdot \cos nt + c_2 \cdot \sin nt)$ unde c_1 și c_2 se determină în mod unic din condițiile inițiale.

Demonstrație. Conform teoremei 2 șirul de numere complexe $z_n = r_1^n$ verifică relația de recurență deci, conform formulei lui Moivre:

$$R^{n+2} [\cos(n+2)t + i \sin(n+2)t] = a \cdot R^{n+1} [\cos(n+1)t + i \sin(n+1)t] + b \cdot R^n [\cos nt + i \sin nt].$$

Separând părțile reale și cele imaginare deducem egalitățile în $\mathbb{R}$:

$$R^{n+2} \cos(n+2)t = R^{n+1} \cos(n+1)t + R^n \cos nt,$$

$$R^{n+2} \sin(n+2)t = R^{n+1} \sin(n+1)t + R^n \sin nt.$$

Amplificând aceste egalități cu c_1 , c_2 și sumând deducem că șirul de numere reale $x_n = R^n (c_1 \cdot \cos nt + c_2 \cdot \sin nt)$ satisface relația de recurență.

Condițiile inițiale revin la $c_1 = p_0$ și $R(c_1 \cdot \cos t + c_2 \cdot \sin t) = p_1$.

Deoarece $\sin t \neq 0$ găsim $c_1 = p_0$ și $c_2 = \frac{p_1 - R p_0 \cos t}{R \sin t}$.

Exemple: 1) Fie șirul $(x_n)_{n \geq 0}$, definit prin $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ și $x_{n+2} = \sqrt{2}x_{n+1} - x_n$, $n \in \mathbb{N}$. Să se determine șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ și să se arate că $x_{n+8} = x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Soluție. Ecuația caracteristică este $r^2 = \sqrt{2}r - 1$ care are $\Delta = -2$ și

$$r_{1,2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 \pm i) = \frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i = \cos \frac{\pi}{4} \pm i \sin \frac{\pi}{4}.$$

Soluția generală a relației de recurență este dată de $x_n = c_1 \cos \frac{n\pi}{4} + c_2 \sin \frac{n\pi}{4}$.

Condițiile inițiale impun $c_1 = 0$, $c_2 = \sqrt{2}$ deci $x_n = \sqrt{2} \sin \frac{n\pi}{4}$.

$x_{n+8} = \sqrt{2} \sin \frac{(n+8)\pi}{4} = \sqrt{2} \sin \left(\frac{n\pi}{4} + 2\pi \right) = \sqrt{2} \sin \frac{n\pi}{4} = x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, deci șirul este periodic.

2) Să se determine șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definit prin $1^\circ x_{n+2} = 2x_{n+1} - 4x_n$, $n \geq 0$; $2^\circ x_0 = x_1 = 1$.

Soluție. Ecuația caracteristică asociată este $r^2 = 2r - 4$ și are rădăcinile

$$r_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right), r_2 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right).$$

Se obține $x_n = 2^n \left(c_1 \cos \frac{n\pi}{3} + c_2 \sin \frac{n\pi}{3} \right)$; deoarece $c_1 = 1$ și $c_2 = 0$ din 2° ,

rezultă $x_n = 2^n \cos \frac{n\pi}{3}$.

Observație. În cazul mai general al unui șir $(x_n)_{n \geq 0}$ definit prin

$$(7) x_{n+k} = a_1 x_{n+k-1} + a_2 x_{n+k-2} + \dots + a_k x_n, a_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, k}, n \in \mathbb{N},$$

$$(8) x_0 = p_0, x_1 = p_1, \dots, x_{k-1} = p_{k-1},$$

pentru a determina forma termenului general (existența și unicitatea șirului sunt asigurate), procedăm în felul următor: îi asociem relației de recurență liniară (7), ecuația caracteristică $r^k = a_1 r^{k-1} + a_2 r^{k-2} + \dots + a_{k-1} r + a_k$ și dacă

1) ecuația are rădăcinile reale și distincte $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, atunci termenul general al șirului $(x_n)_{n \geq 0}$ are forma

$$x_n = c_1 \alpha_1^n + c_2 \alpha_2^n + \dots + c_k \alpha_k^n, \text{ unde } c_i, i = \overline{1, k}$$

se determină din (8);

2) ecuația caracteristică are pe α_1 rădăcină multiplă de ordinul s , $\alpha_1 \in \mathbb{R}$, atunci șirurile cu termenii generali $n \cdot \alpha_1^n, n^2 \cdot \alpha_1^n, \dots, n^{s-1} \cdot \alpha_1^n$ satisfac condiția (7) și termenul general al șirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ are forma

$$(9) x_n = c_1 \alpha_1^n + c_2 \cdot n \alpha_1^n + \dots + c_s \cdot n^{s-1} \alpha_1^n + c_{s+1} \cdot \alpha_2^n + c_{s+2} \cdot \alpha_3^n + \dots + c_k \cdot \alpha_k^n.$$

Exemple: 1) Să se determine șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ astfel încât: $1^\circ x_{n+3} = 2x_{n+2} + x_{n+1} - 2x_n$, $n \in \mathbb{N}$; $2^\circ x_0 = 3, x_1 = 2, x_2 = 6$.

Soluție. Ecuația caracteristică asociată relației de recurență 1° este $r^3 = 2r^2 + r - 2$ și are rădăcinile $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -1, \alpha_3 = 2$, deci $x_n = c_1 + c_2(-1)^n + c_3 \cdot 2^n$. Din condiția 2° se obține $c_1 = 1, c_2 = 1, c_3 = 1$, deci $x_n = 1 + (-1)^n + 2^n$.

2) Să se determine șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ astfel încât: $1^\circ x_{n+3} = 7x_{n+2} - 16x_{n+1} + 12x_n$, $n \in \mathbb{N}$; $2^\circ x_0 = 2, x_1 = 3, x_2 = 5$.

Soluție. Ecuația caracteristică asociată relației 1° este $r^3 = 7r^2 - 16r + 12$, care are rădăcinile $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$ și $\alpha_3 = 3$ și termenul general al șirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ce satisface (1) are forma $x_n = c_1 \cdot 2^n + c_2 \cdot n \cdot 2^n + c_3 \cdot 3^n$. Ținând seama de condiția 2° se obține $c_1 = 1, c_2 = -1, c_3 = 1$.

b) Recurențe liniare, de ordinul 2, neomogene

Vrem să determinăm termenul general al șirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, definit prin:

$$(10) x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n + f(n), \forall n \in \mathbb{N}; (11) x_0 = p_0, x_1 = p_1, p_0, p_1 \in \mathbb{R},$$

unde $a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$ și $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție.

Teorema 4 ne asigură că există un singur șir care satisface condițiile (10) și (11).

Teorema 9. Dacă ecuația $r^2 = ar + b$ are două rădăcini distincte α și β și dacă șirul cu termenul general z_n satisface condiția (10) atunci șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ are termenul general (12) $x_n = c_1 \alpha^n + c_2 \beta^n + z_n$, unde c_1 și c_2 se determină din (11).

Demonstrație. Deoarece $\alpha^2 = a\alpha + b$ și $\beta^2 = a\beta + b$ rezultă $c_1 \alpha^{n+2} + c_2 \beta^{n+2} = a(c_1 \alpha^{n+1} + c_2 \beta^{n+1}) + b(c_1 \alpha^n + c_2 \beta^n)$ și cum $z_{n+2} = az_{n+1} + bz_n + f(n)$, adunând membru cu membru se obține:

$$c_1 \alpha^{n+2} + c_2 \beta^{n+2} + z_{n+2} = a(c_1 \alpha^{n+1} + c_2 \beta^{n+1} + z_{n+1}) + b(c_1 \alpha^n + c_2 \beta^n + z_n) + f(n),$$

$n \in \mathbb{N}$, adică $x_n = c_1 \alpha^n + c_2 \beta^n + z_n$ satisface (10). Condițiile $x_0 = p_0, x_1 = p_1$, devin

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + z_0 = p_0 \\ c_1 \cdot \alpha + c_2 \cdot \beta + z_1 = p_1 \end{cases} \text{ sistem ce are soluție unică.}$$

Teorema 10. Dacă ecuația $r^2 = ar + b$ are o rădăcină dublă α și dacă șirul cu termenul general z_n satisface (10) atunci șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este dat prin

$$(13) x_n = c_1 \cdot \alpha^n + c_2 \cdot n \cdot \alpha^n + z_n, \text{ unde } c_1 \text{ și } c_2 \text{ se determină din (11).}$$

Demonstrația este imediată constanțele fiind $c_1 = p_0 - z_0$, $c_2 = \frac{1}{\alpha}(p_1 - z_1) - c_1$.

Determinarea efectivă a lui z_n din teorema 10 se realizează prin teorema următoare în cazul relativ frecvent precizat de cazul particular când există un polinom nenul P de grad p și o constantă $\gamma \in \mathbb{R}^*$ încât

$$(13) f(n) = \gamma^n \cdot P(n).$$

Teorema 11. În condițiile (13) dacă s este ordinul de multiplicitate a lui γ pentru polinomul caracteristic există un polinom Q de grad $p + s$ încât $z_n = \gamma^n \cdot Q(n)$ să satisfacă relația de recurență (10).

Demonstrație. Recurența (10) este satisfăcută dacă

$$(14) \gamma^2 \cdot Q(n+2) - a \cdot \gamma \cdot Q(n+1) - b \cdot Q(n) = P(n).$$

Notând cu q coeficientul dominant al polinomului Q , termenii de grad maxim ai membrului I din (14) sunt furnizați de

$$q[\gamma^2(n+2)^{p+s} - a \cdot \gamma(n+1)^{p+s} - b \cdot \gamma \cdot n^{p+s}] = \\ = c_0[(\gamma^2 - a\gamma - b) \cdot n^{p+s} + \gamma \cdot (p+s) \cdot (2\gamma - a) \cdot n^{p+s-1} + \\ + \frac{\gamma}{2}(p+s)(p+s-1)(4\gamma - a) \cdot n^{p+s-2} + \dots].$$

Dacă $\gamma^2 - a\gamma - b \neq 0$ vom putea determina q luând $s = 0$.

Dacă $\gamma^2 - a\gamma - b = 0$, dar $2\gamma - a \neq 0$, pentru $s = 0$, găsim q .

În fine, dacă $\gamma^2 - a\gamma - b = 0 = 2\gamma - a$, rezultă $\frac{\gamma}{2}(p+s)(p+s-1)(4\gamma - a) \neq 0$

și pentru determinarea lui q se ia $s = 1$.

După determinarea coeficientului dominant q al lui Q se trece la determinarea succesivă a următorilor coeficienți.

Observație. 1) În condiții mai generale decât (13), când există și o constantă $\theta \neq k\pi$ încât $(13') f(n) = \gamma^n \cdot [\lambda \cos n\theta + \mu \sin n\theta] \cdot P(n)$, se va găsi o soluție particulară $z_n = \gamma^n \cdot [A \cos n\theta + B \sin n\theta] \cdot Q(n)$, gradul $p + S$ al polinomului Q fiind determinat considerând acum ordinul S de multiplicitate pentru polinomul caracteristic al numărului complex $\gamma(\cos \theta + i \sin \theta)$.

2) Dacă $f(n) = f_1(n) + f_2(n)$ sau $f(n) = A \cdot f_3(n)$ cu $A \in \mathbb{R}$ și $(z_n^{(i)})_{n \geq 0}$ satisfac relațiile de recurență $z_{n+2}^{(i)} = a \cdot z_{n+1}^{(i)} + b \cdot z_n^{(i)} + f_i(n)$ pentru $i = 1, 2$ sau 3, atunci vom avea o soluție particulară a lui (10) de forma

$$z_n = z_n^{(1)} + z_n^{(2)} \text{ sau } z_n = A \cdot z_n^{(3)}.$$

Exemple: 1) Pentru relația de recurență (15) $x_{n+2} = 2x_{n+1} - x_n + 17 \cdot 5^n + 7 \cos \frac{n\pi}{3}$

se pune în evidență soluția generală a recurenței omogene $y_n = c_1 + nc_2$.

Luând $f_1(n) = 17 \cdot 5^n$ găsim o soluție particulară $z_n' = c_3 \cdot 5^n$ unde $c_3 = 1$.

Luând $f_2(n) = 7 \cos \frac{n\pi}{3}$ determinăm λ și μ încât $z_n'' = \lambda \cos \frac{n\pi}{3} + \mu \sin \frac{n\pi}{3}$ să

$$\text{satisfacă } z_{n+2}'' = 2z_{n+1}'' - z_n'' + 7 \cos \frac{n\pi}{3}.$$

Găsim $\gamma = -\frac{7}{2} = -7 \cos \frac{\pi}{3}$, $\mu = -\frac{7 \cdot \sqrt{3}}{2} = -7 \sin \frac{\pi}{3}$ și putem transcrie

$$z_n'' = -7 \cos \frac{(n-1) \cdot \pi}{3}. \text{ Soluția generală a recurenței (15) este deci}$$

$$x_n = c_1 + c_2 n + 5^n - 7 \cos \frac{(n-1)\pi}{3}.$$

2) Să se determine șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ ce satisface condițiile inițiale $x_0 = 0$, $x_1 = 2$ și

relațiile de recurență (16) $x_{n+2} = 3 \cdot x_{n+1} - 2 \cdot x_n + 3n(n+1)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Soluție. Avem $f(n) = P_2(n) = n^2 + n$ și 1 este soluție simplă a ecuației caracteristice $r^2 - 3r + 2 = 0$. Căutăm conform teoremei 11 o soluție particulară de forma $z_n = Q_3(n) = an^3 + bn^2 + cn + d$.

Explicitând condiția $P(n+2) - 3P(n+1) + 2P(n) = 3n(n+1)$ găsim $a = -1$, $b = -3$, $c = -8$, deci $z_n = -n^3 - 3n^2 - 8n + d$.

Soluția generală a recurenței omogene este $z_n = c_1 + c_2 \cdot 2^n$ și găsim cu ajutorul condițiilor inițiale $x_n = -6 + 6 \cdot 2^n - n^3 - 3n^2 - 8n$.

c) Probleme propuse

1. Să se determine mulțimea șirurilor $(x_n)_{n \geq 1}$ ce verifică relația de recurență

$$x_{n+3} = x_n.$$

2. Să se arate că orice șir $(x_n)_{n \geq 0}$ ce satisface relația de recurență

$$x_{n+1} = x_n + 2n + 1, \forall n \in \mathbb{N} \text{ satisface și } x_{n+3} = 3x_{n+2} - 3x_{n+1} + x_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

3. Ce condiții inițiale trebuie impuse ca relația de recurență

$$x_{n+3} = 3x_{n+2} - 3x_{n+1} + x_n \text{ să admită ca soluție unică pe } x_n = n^2?$$

4. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ definit prin relația $x_{n+4} = 4x_{n+3} - 6x_{n+2} + 4x_{n+1} - x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$x_0 = a$, $x_1 = b$, $x_2 = c$, $x_3 = d$ cu $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Să se determine $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ astfel încât relația dată să admită $x_n = n^3$ soluție unică.

5. Fie punctele $A_0(x_0)$, $A_1(x_1)$ puncte pe axa Ox unde $0 < x_0 < x_1$. Punctul $A_2(x_2)$ este mijlocul segmentului A_0A_1 , $A_3(x_3)$ este mijlocul segmentului A_1A_2 , etc. $A_n(x_n)$ este mijlocul segmentului $A_{n-2}A_{n-1}$.

Să se afle forma lui x_n în funcție de x_0 și n și să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

6. Să se afle limitele următoarelor șiruri $(x_n)_{n \geq 0}$ definite prin:

$$\text{a) } x_0 = 0, x_1 = 1, x_{n+1} = 2x_n - x_{n-1}, \forall n \geq 1;$$

$$\text{b) } x_0 = 1, x_1 = 1, x_{n+1} = x_n - \frac{1}{4}x_{n-1}, \forall n \geq 1;$$

$$\text{c) } x_0 = 1, x_1 = 1, x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + x_{n-1}), \forall n \geq 1.$$

7. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ definit prin: $x_0 = a$, $x_1 = 0$, $x_{n+1} = \alpha x_n + \frac{1}{4} x_{n-1}$, $\forall n \geq 1$.

Să se determine $\alpha \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^*$, astfel ca:

- a) șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ să fie convergent; b) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$;
c) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$; d) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$.

8. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ definit prin: $x_0 = 0$, $x_1 = 2$, $x_{n+1} = -\frac{1}{2}(x_n - x_{n-1})$, $\forall n \geq 1$.

Să se arate că șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este divergent.

9. Să se studieze convergența șirului $(x_n)_{n \geq 0}$ definit prin:

- a) $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_{n+1} = 3x_n - 2x_{n-1}$, $\forall n \geq 1$;
b) $x_0 = 1$, $x_1 = 1$, $x_{n+1} = 3x_n - x_{n-1}$, $\forall n \geq 1$;
c) $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_{n+1} = x_n - x_{n-1}$, $\forall n \geq 1$;
d) $x_0 = 3$, $x_1 = 1$, $x_2 = 9$, $x_{n+2} = x_{n+1} + 4x_n - 4x_{n-1}$, $\forall n \geq 1$;
e) $x_0 = 3$, $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_{n+3} = 4x_{n+2} - 6x_{n+1} + 4x_n$, $\forall n \geq 0$;
f) $x_0 = 3$, $x_1 = 10$, $x_{n+2} = 7x_{n+1} - 12x_n + 6n + 1$, $\forall n \geq 0$.

10. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ definit prin: $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_{n+2} = x_{n+1} - x_n$, $\forall n \geq 0$.

Să se studieze convergența șirului $(x_n)_{n \geq 0}$.

11. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ definit prin: $x_0 = 0$, $x_1 = 2$, $x_{n+2} = 3x_{n+1} - 2x_n + n^2 + n$, $\forall n \geq 0$. Să se studieze convergența șirului $(x_n)_{n \geq 0}$.

12. Se consideră șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ definit prin: $x_0 = a$, $x_1 = b$ ($a, b \in \mathbb{R}$ date) și $x_{n+2} = \frac{2}{5}x_{n+1} + \frac{3}{5}x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Să se determine expresia lui x_n în funcție de a, b și să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. (Definitivat, Prof. I, 1982)

13. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$ și șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ definit prin: $x_0 = 1$, $x_1 = a + b$, $x_{n+2} = (a + b)x_{n+1} - abx_n$, $\forall n \geq 0$. Să se determine termenul general al șirului în funcție de a și b iar în cazul $a > b > 0$ să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$.

14. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ definit prin $x_0 = 1$, $x_1 = a \in \mathbb{R}$, $x_{n+1} = 3x_n - 2x_{n-1} - n^2$, $\forall n \geq 1$. Să se determine x_n .

15. Se consideră un șir $(x_n)_{n \geq 1}$ de numere strict pozitive definit prin $\frac{2}{x_n} = \frac{1}{x_{n+1}} + \frac{1}{x_{n-1}}$, $\forall n \geq 2$. Dacă $x_1 = p$, $x_2 = q$, $p, q > 0$, $p \neq q$, să se afle termenul general x_n și să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

16. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ definit prin: $x_0 = x_1 = 1$, $x_{n+2} = x_{n+1} + 2x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

- a) Să se arate că numerele x_n sunt impare și că $\forall n \in \mathbb{N}$ $(x_n, x_{n+1}) = 1$.
b) Să se arate că $\forall n \in \mathbb{N}$ și $p, p > 1$ există relația $x_{n+p+1} = x_{n+1}x_p + 2x_nx_{p-1}$.
c) Să se determine c.m.m.d.c. al lui x_n, x_{n+2} .

17. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ definit prin: $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ și $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

- a) Să se calculeze x_n . b) Să se arate că $1 + x_0 + x_1 + \dots + x_n = x_{n+2}$.
c) Să se arate că $x_n^2 = x_{n-1} \cdot x_{n+1} + (-1)^{n+1}$.

18. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ definit prin relația $x_{n+1} + 11x_{n-2} = 6(x_{n-1} + x_{n-3})$, $\forall n \geq 3$ cu $x_0 = 3$, $x_1 = 6$, $x_2 = 14$. Se cere:

- a) să se determine termenul general x_n ; b) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$;

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n}$; d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{x_n - (1+2^n)}{n!}}$

19. Fie $a > b > c > 0$ și $(x_n)_{n \geq 0}$ un șir ce satisface relația de recurență

$$ax_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = 1, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Să se demonstreze că șirul este convergent și să se calculeze limita.

20. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ un șir de numere definit prin relația $x_{n+1} + x_{n-1} = ax_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, unde $a \in (-2, 2)$. Să se arate că șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este mărginit.

21. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ definit prin relația $x_{n+1} = \frac{x_n + x_{n-1}}{2}$, $\forall n \geq 1$, $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ date. Să se arate că șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este convergent și $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{x_0 + 2x_1}{3}$.

22. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ definit prin relația $x_{n+3} = \frac{1}{4}(8x_{n+2} - 5x_{n+1} + x_n)$, $\forall n \geq 0$, $x_0, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ fixate. Să se determine termenul general x_n și să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 - 4x_1 + 4x_2$.

23. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ definit prin relația $x_{n+1} = \sqrt{x_n x_{n-1}}$, $\forall n \geq 2$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. Să se arate că șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este convergent și $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt[3]{4}$.

24. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ definit prin relația $x_{n+2} = 6x_{n+1} - 4x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_0 = 2$, $x_1 = 6$.

- a) Să se determine termenul general al șirului $(x_n)_{n \geq 0}$.

- b) Să se arate că $2^n / x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

25. Fie a, b două numere strict pozitive și șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ definit prin

$$x_{n+2} = \frac{ax_{n+1} + bx_n}{a+b}, \forall n \in \mathbb{N}, x_0 = 1, x_1 = 2.$$

Să se studieze convergența șirului $(x_n)_{n \geq 0}$.

26. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ definit prin $x_1 = x_2 = 1$, $x_{n+2} = \frac{x_{n+1}^2 + 2}{x_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Să se arate că $x_n \in \mathbb{Z}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

27. Se dă șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ dat prin relația de recurență

$$x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n + c, \forall n \geq 0, x_0 = 2, x_1 = 1, a > 0, b > 0, c > 0.$$

Să se arate că dacă $a + 2b + c < 1$ atunci șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este convergent și să se calculeze limita.

Prezentăm în continuare 16 probleme referitoare la șirul lui Fibonacci $(F_n)_{n \geq 0}$ caracterizat prin recurența $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ și condițiile inițiale $F_1 = F_2 = 1$. Reamintim și formula lui Binet, (F), dedusă mai sus dar transcrișă acum pentru

actualul mod de indexare prin $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right], n \in \mathbb{N}^*$.

$$28. F_1 + F_2 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1.$$

$$29. F_1 + F_3 + \dots + F_{2n-1} = F_{2n}.$$

$$30. F_2 + F_4 + \dots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1.$$

$$31. F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1} - 1.$$

$$32. F_2 - F_3 + F_4 - F_5 + \dots + (-1)^n F_n = (-1)^n F_{n-1}.$$

$$33. F_{n-1} F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n.$$

$$34. F_{2n} - F_{n+1}^2 - F_n^2 = 0.$$

$$35. F_n^2 + F_{n+1}^2 - F_{2n+1} = 0.$$

$$36. \text{Dacă } m \mid n \text{ atunci } F_m \mid F_n.$$

$$37. (F_n, F_{n+1}) = 1.$$

$$38. (F_n, F_m) = F_{(n,m)}.$$

$$39. F_n = 5F_{n-4} + 3F_{n-5}.$$

$$40. 5 \mid F_n \text{ dacă } n = 5k, k \in \mathbb{N}^*.$$

$$41. n \geq 3 \Rightarrow \begin{vmatrix} F_1 & F_2 & \dots & F_n \\ F_2 & F_3 & \dots & F_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_n & F_{n+1} & \dots & F_{2n-1} \end{vmatrix} = 0. \quad 42. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ (numărul de aur).}$$

43. Ecuația $F_{2n-2}x^2 + F_{2n}x + F_{2n-1} = 0$ admite o rădăcină rațională neîntreagă cu excepția cazului $n = 1$.

Prezentăm în continuare 13 probleme referitoare la șirul lui Lucas $(L_n)_{n \geq 1}$ definit prin $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$ cu condițiile inițiale $L_1 = 2, L_2 = 1$ și satisfăcând

formula de tip Binet $L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$.

$$44. 1 + L_1 + L_2 + \dots + L_n = L_{n+2}.$$

$$45. L_1 + L_3 + \dots + L_{2n-1} = L_{2n} + 1.$$

$$46. L_2 + L_4 + \dots + L_{2n} = L_{2n+1} - 2.$$

$$47. L_1^2 + L_2^2 + \dots + L_n^2 = L_n \cdot L_{n+1} + 2.$$

$$48. F_{2n} = F_n \cdot L_n.$$

$$49. L_n^2 = 5F_n^2 + 4(-1)^n.$$

$$50. L_n^2 = L_{n+1}L_{n-1} + 5(-1)^n.$$

$$51. F_{2n} \cdot F_{2n+1} = \frac{1}{5}(L_{4n+1} - 1).$$

$$52. L_{2n} \cdot L_{2n+2} - 5F_{n+1}^2 = 1.$$

$$53. L_n = F_{n+1} + F_{n-1}, \forall n > 1.$$

$$54. 5F_n = L_{n+1} + L_{n-1}.$$

$$55. n \geq 3 \Rightarrow \begin{vmatrix} L_1 & L_2 & \dots & L_n \\ L_2 & L_3 & \dots & L_{n+1} \\ L_3 & L_4 & \dots & L_{n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_n & L_{n+1} & \dots & L_{2n-1} \end{vmatrix} = 0.$$

$$56. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{L_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

§5. Sisteme de recurențe

a) Determinări de șiruri date prin sisteme recursive

Fie șirurile $(x_n)_{n \geq 0}, (y_n)_{n \geq 0}$ definite prin sistemul de relații

$$(1) \begin{cases} x_{n+1} = ax_n + by_n \\ y_{n+1} = cx_n + dy_n \end{cases}, n \geq 0, \text{ unde } a, b, c, d, x_0, y_0 \text{ sunt numere reale date.}$$

În cele ce urmează vom prezenta câteva metode de determinare a șirurilor și studiul convergenței lor.

Înmulțind cu α a doua ecuație a sistemului (1) și adunându-le se obține

$$(2) x_{n+1} + \alpha y_{n+1} = (a + \alpha c)x_n + (b + \alpha d)y_n, n \geq 0. \text{ Determinăm } \alpha \text{ astfel încât}$$

$$(3) b + \alpha d = \alpha(a + \alpha c)$$

atunci relația (2) devine (4) $x_{n+1} + \alpha y_{n+1} = (a + \alpha c)(x_n + \alpha y_n)$.

În relația (4) notând cu $z_n = x_n + \alpha y_n$, se obține

$$(5) \begin{cases} z_{n+1} = (a + \alpha c)z_n, n \geq 0 \\ z_0 = x_0 + \alpha y_0, \end{cases}$$

relație ce definește o progresie geometrică. Din ea se obține

$$(6) \begin{cases} z_n = (a + \alpha c)^n z_0, \\ z_0 = x_0 + \alpha y_0. \end{cases}$$

Din ecuația (3) se obține (7) $\alpha^2 c + \alpha(a - d) - b = 0$.

Dacă $c \neq 0$, atunci $\Delta = (a - d)^2 + 4bc = (a + d)^2 - 4(ad - bc)$ și dacă $\Delta > 0$ se va aplica metoda 1 pentru determinarea șirurilor $(x_n)_{n \geq 0}, (y_n)_{n \geq 0}$.

Dacă $\Delta \leq 0$ se va aplica metoda 2 - metoda matricială pentru determinarea șirurilor $(x_n)_{n \geq 0}, (y_n)_{n \geq 0}$.

Metoda 1 (a „combinațiilor 1 - recursive“)

Dacă $\Delta > 0$, fie α_1, α_2 cele două rădăcini reale distincte ale lui (7). Din (6)

$$\text{rezultă } \begin{cases} x_n + \alpha_1 y_n = (ax_0 + \alpha_1 y_0)(a + \alpha_1 c)^n \\ x_n + \alpha_2 y_n = (ax_0 + \alpha_2 y_0)(a + \alpha_2 c)^n \end{cases}$$

Deoarece determinantul sistemului $\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 \\ 1 & \alpha_2 \end{vmatrix} = \alpha_2 - \alpha_1 \neq 0$ rezultă că x_n și y_n

există și sunt unice.

Metoda 2 („matricială“)

Dacă $\Delta \leq 0$, sistemul (1) se poate scrie sub forma

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}, \text{ unde } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A, \text{ atunci } \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Problema revine acum la precizarea formei generale ale matricilor A^n . Deși această nouă problemă va fi analizată pe larg în capitolul II vom schița și aici etapele principale ale acestui algoritm. Considerăm numerele reale $u = a + d = \text{Tr } A$ (unde Tr este prescurtarea cuvântului englez *trace* = urmă) și $v = ad - bc = \det A$. Condiția $\Delta \leq 0$ asigură (9) $u^2 \leq 4v$. Se deduce identitatea

(10) $A^2 - uA + vI_2 = 0$. Acum determinarea matricilor A^n revine la căutarea șirurilor numerice $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Încât (11) $A^n = a_n A + b_n I_2$.

Pentru a preciza relațiile de recurență ce le satisfac a_n și b_n vom observa

$$a_{n+1} A + b_{n+1} I_2 = A^{n+1} = A^n \cdot A' = (a_n A + b_n I_2) \cdot A = a_n A^2 + b_n A = \\ = a_n (uA - vI_2) + b_n A = (ua_n + b_n) \cdot A - va_n I_2.$$

Avem deci (12) $a_{n+1} = ua_n + b_n$, $b_{n+1} = -va_n$. Eliminăm acum șirul (b_n) observând (13) $a_{n+2} = ua_{n+1} - va_n$, relație de recurență liniară omogenă de ordin 2 ce permite determinarea lui (a_n) în baza condițiilor inițiale evidente $a_1 = 1$, $a_2 = u$.

Vom prezenta succesiv exemple de aplicare a celor două metode.

Exemplul 1. Fie șirurile $(x_n)_{n \geq 0}$, $(y_n)_{n \geq 0}$ definite prin relațiile de recurență

$$(1') \begin{cases} x_{n+1} = \frac{x_n + 3y_n}{4} \\ y_{n+1} = \frac{3x_n + 2y_n}{5}, n \geq 0, \text{ cu } x_0, y_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

a) Să se determine în funcție de x_0, y_0, n termenii generali ai șirurilor (x_n) , (y_n) .

b) Să se studieze convergența șirurilor (x_n) , (y_n) și să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.

Soluție. Înmulțind cu α relația a doua, se obține

$$(2') x_{n+1} + \alpha y_{n+1} = \left(\frac{1}{4} + \frac{3\alpha}{5}\right)x_n + \left(\frac{3}{4} + \frac{2\alpha}{5}\right)y_n. \text{ Impunând asupra lui } \alpha \text{ condiția}$$

$$(3') \frac{3}{4} + \frac{2\alpha}{5} = \alpha \left(\frac{1}{4} + \frac{3\alpha}{5}\right) \text{ relația (2) devine}$$

$$(4') x_{n+1} + \alpha y_{n+1} = \left(\frac{1}{4} + \frac{3\alpha}{5}\right)(x_n + \alpha y_n). \text{ Acum (3) devine } 12\alpha^2 - 3\alpha - 15 = 0$$

deci $\alpha_1 = \frac{5}{4}$ și $\alpha_2 = -1$. Egalitățile (8) devin

$$(5') \begin{cases} x_n + \frac{5}{4}y_n = \left(\frac{1}{4} + \frac{3 \cdot \frac{5}{4}}{5}\right)^n \left(x_0 + \frac{5}{4}y_0\right) \\ x_n - y_n = \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{5}\right)^n (x_0 - y_0). \end{cases}$$

Rezolvând sistemul (5') se obține: $x_n = \frac{4}{9} \left(x_0 + \frac{5}{4}y_0\right) + \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{4} (x_0 - y_0) \left(-\frac{7}{20}\right)^n$

$$y_n = \frac{4}{9} \left(x_0 + \frac{5}{4}y_0\right) - \frac{4}{9} (y_0 - x_0) \left(-\frac{7}{20}\right)^n. \text{ Deci } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \frac{4x_0 + 5y_0}{9}.$$

Exemplul 2. Fie șirurile $(x_n)_{n \geq 0}$, $(y_n)_{n \geq 0}$ date prin relațiile de recurență

$$(1') \begin{cases} x_{n+1} = x_n + 2y_n \\ y_{n+1} = 2x_n + y_n, n \geq 0 \text{ cu } x_0 = 0, y_0 = 1. \end{cases} \text{ Să se determine în funcție de } n,$$

x_0, y_0 , termenii generali ai șirurilor $(x_n)_{n \geq 0}$ și $(y_n)_{n \geq 0}$.

Soluție. Ecuația (3) precizează rădăcinile $\alpha = \pm 1$, ecuațiile (8) dau

$$x_n + y_n = 3^n(x_0 + y_0), x_n - y_n = (-1)^n(x_0 - y_0). \text{ Folosind și condițiile inițiale găsim}$$

$$x_n = \frac{1}{2} \cdot 3^n - \frac{1}{2} \cdot (-1)^{n+1}, y_n = \frac{1}{2} \cdot 3^n + \frac{1}{2} \cdot (-1)^n.$$

Exemplul 3. Cunoscând $x_0 = 1$ și $y_0 = 2$ să se determine șirurile $(x_n)_{n \geq 0}$, $(y_n)_{n \geq 0}$ ce satisfac sistemul de recurențe $x_{n+1} = x_n + 2y_n$, $y_{n+1} = -2x_n + 5y_n$, $\forall n \geq 0$.

Soluție. Se observă că $\Delta = (a + d)^2 - 4(ad - bc) = 6^2 - 4 \cdot 9 = 0$ deci pentru determinarea șirurilor $(x_n)_{n \geq 0}$, $(y_n)_{n \geq 0}$ nu poate fi întrebuințată metoda 1.

Sistemul de relații de recurență se poate scrie sub forma

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}, \text{ de unde se obține } \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ deci}$$

totul revine la a determina matricea A^n , $\text{Tr } A = 6$, $\det A = 9$.

Relația de recurență (13) are ecuația caracteristică $r^2 - 6r + 9 = 0$ deci furnizează $a_n = 3^n(c_1 + nc_2) = n \cdot 3^{n-1}$. Avem și $b_{n+1} = -va_n$ deci $b_n = (1-n) \cdot 3^n$. Deducem

$$A^n = n \cdot 3^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} + (1-n) \cdot 3^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3-2n) \cdot 3^{n-1} & 2n \cdot 3^{n-1} \\ -2n \cdot 3^{n-1} & (2n+3) \cdot 3^{n-1} \end{pmatrix}$$

și $x_n = 3^{n-1}(2n+3)$, $y_n = 2 \cdot 3^{n-1}(n+3)$, $\forall n \geq 0$.

Metoda 3 este o metodă de determinare a șirurilor $(x_n)_{n \geq 0}$, $(y_n)_{n \geq 0}$ în funcție de x_0, y_0 și n , ce constă în a reduce sistemul de relații de recurență la două relații de recurență de ordin doi cu coeficienți constanți.

Exemplul 4. Fie șirurile $(x_n)_{n \geq 0}$, $(y_n)_{n \geq 0}$ definite prin relațiile de recurență

$$x_{n+1} = \frac{x_n + 3y_n}{4}, y_{n+1} = \frac{3x_n + 2y_n}{5}, n \geq 0 \text{ cu } x_0, y_0 \in \mathbb{R} \text{ fixați.}$$

a) Să se determine în funcție de n, x_0, y_0 termenii generali ai șirurilor $(x_n)_{n \geq 0}$, $(y_n)_{n \geq 0}$.

b) Să se studieze convergența șirurilor $(x_n)_{n \geq 0}$, $(y_n)_{n \geq 0}$ și să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.

Soluție. Eliminând y_n din relațiile de recurență deducem $15y_{n+1} = 8x_{n+1} + 7x_n$. Înlocuim y_{n+1} în prima egalitate a recurenței (cu indicele n ajustat) obținem relația de recurență liniară omogenă, cu coeficienți constanți $20x_{n+2} = 13x_{n+1} + 7x_n$.

Rădăcinile ecuației caracteristice fiind 1 și $-\frac{7}{20}$ obținem

$$x_n = c_1 + c_2 \left(-\frac{7}{20}\right)^n = \frac{4x_0 + 5y_0}{9} + \frac{x_0 - y_0}{9} \cdot \left(-\frac{7}{20}\right)^n.$$

$$\text{Se determină și } y_n = \frac{1}{3}(4x_{n+1} - x_n) = \frac{4x_0 + 5y_0}{9} + \frac{4(x_0 - y_0)}{9} \cdot \left(-\frac{7}{20}\right)^n.$$

$$\text{Urmează rapid } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \frac{1}{9}(4x_0 + 5y_0).$$

b) Probleme de convergență

Vom ilustra în continuare, prin exemple, o metodă de demonstrație a convergenței șirurilor recurente ce nu solicită determinarea efectivă a termenilor generali; esențială aici este folosirea „cștelui lui Cantor”.

Exemplul 5. Fiind cunoscute numerele reale x_0, y_0 să se arate că șirurile $(x_n)_{n \geq 0}, (y_n)_{n \geq 0}$ ce satisfac $x_{n+1} = \frac{1}{4}(3x_n + y_n), y_{n+1} = \frac{1}{5}(2x_n + 3y_n)$ converg la aceeași limită.

Soluție. Constatăm $y_{n+1} - x_{n+1} = \frac{7}{20}(y_n - x_n) = \dots = \left(\frac{7}{20}\right)^{n+1}(y_0 - x_0)$ deci

$(y_n - x_n)$ tinde descrescător la zero. Mai observăm $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{4}(y_n - x_n) > 0$,

$y_n - y_{n+1} = \frac{2}{5}(y_n - x_n) > 0$. Rezultă șirul de inegalități

(*) $x_0 < x_1 < \dots < x_n < \dots < y_n < \dots < y_1 < y_0$, ce asigură rapid concluzia.

Exemplul 6 (Media aritmetico-geometrică a lui Gauss). Fiind date numere pozitive a, b încât $a < b$ să se arate că șirurile $(x_n)_{n \geq 0}, (y_n)_{n \geq 0}$ ce satisfac

$x_0 = a, y_0 = b$ și recurențele $x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, y_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + y_n), \forall n \geq 0$ admit o limită comună.

Soluție. Evident, termenii x_n, y_n sunt pozitivi. Avem

$$y_{n+1} - x_{n+1} = \frac{1}{2}(\sqrt{y_n} - \sqrt{x_n})^2 > 0.$$

Reținem că pentru orice $n \in \mathbb{N}$ are loc $x_n < y_n$. Urmează $x_n^2 < x_n y_n = x_{n+1}^2$, deci $x_n < x_{n+1}$, adică (x_n) este monoton crescător.

Analog $x_n + y_n < 2y_n \Rightarrow y_{n+1} < y_n$, deci (y_n) este șir descrescător. Punem în evidență șirul de inegalități (*) din soluția exemplului precedent ce asigură că:

– șirul monoton crescător (x_n) este mărginit superior deci convergent la o limită A ;

– șirul monoton descrescător (y_n) este mărginit inferior deci convergent la o limită B .

Trecând la limită în oricare dintre relațiile de recurență găsim $A = B$.

Observație. Pentru această limită comună $A = B$ se folosește denumirea de **media aritmetico-geometrică** a numerelor a, b .

Exemplul 7. Fie șirurile $(x_n)_{n \geq 0}, (y_n)_{n \geq 0}$ definite prin relațiile $x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$,

$$y_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n}, \forall n \geq 0 \text{ și } x_0 > y_0 > 0.$$

a) Să se arate că șirurile $(x_n)_{n \geq 0}, (y_n)_{n \geq 0}$ converg la aceeași limită.

b) $x_n y_n = x_0 y_0, \forall n \in \mathbb{N}$.

$$c) \frac{x_n - \sqrt{x_n y_n}}{x_n + \sqrt{x_n y_n}} = \left(\frac{x_0 - \sqrt{x_0 y_0}}{x_0 + \sqrt{x_0 y_0}} \right)^{2^n} \quad d) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \sqrt{x_0 y_0}.$$

Soluție. a) $P(n)$: $x_n > y_n$ prin inducție completă. $P(0)$: $x_0 > y_0 > 0$.

$P(k)$: $x_k > y_k > 0$ adevărată, $k \in \mathbb{N}, k \geq 0$. $P(k+1)$: $x_{k+1} > y_{k+1} > 0$.

$x_{k+1} = \frac{x_k + y_k}{2} > \frac{2x_k y_k}{x_k + y_k}$, adevărată deoarece media aritmetică a două numere

reale strict pozitive definite este strict mai mare decât media armonică, deci $P(k+1)$ adevărată $\Rightarrow P(k) \Rightarrow P(k+1) \forall k \in \mathbb{N}$, deci $P(n)$ adevărată $\forall n \in \mathbb{N}$, adică $x_n > y_n, \forall n \geq 0$. Se verifică acum $x_{n+1} > x_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

$$x_n > y_n \Rightarrow 2x_n > x_n + y_n \Rightarrow x_n > \frac{x_n + y_n}{2} = x_{n+1} \Rightarrow x_n > x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\text{Din } x_n > \frac{x_n + y_n}{2} \Rightarrow 1 < \frac{2x_n}{x_n + y_n} \Rightarrow y_n < \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n}, \text{ deci } y_n < y_{n+1}.$$

S-a stabilit, deci $x_0 \geq x_n > x_{n+1} > y_{n+1} > y_n \geq y_0 \Rightarrow$ șirurile $(x_n)_{n \geq 0}, (y_n)_{n \geq 0}$ sunt monotone și mărginite, deci sunt convergente.

Notăm $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b, a \geq b$, și trecând la limită în relația

$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \text{ se obține } a = \frac{a+b}{2} \Rightarrow a = b.$$

b) Înmulțind cele două relații de recurență se obține $x_{n+1} y_{n+1} = x_n y_n$, prin inducție rezultă $x_n y_n = x_0 y_0, \forall n \in \mathbb{N}$. Observăm

$$(x_{n-1} \pm \sqrt{x_{n-1} y_{n-1}})^2 = x_{n-1} (x_{n-1} + y_{n-1} \pm 2\sqrt{x_{n-1} y_{n-1}}) = 2x_{n-1} (x_n \pm \sqrt{x_n y_n}).$$

$$\text{Rezultă } \frac{x_n - \sqrt{x_n y_n}}{x_n + \sqrt{x_n y_n}} = \left(\frac{x_{n-1} - \sqrt{x_{n-1} y_{n-1}}}{x_{n-1} + \sqrt{x_{n-1} y_{n-1}}} \right)^2$$

c) Prin inducție se stabilește egalitatea enunțată.

d) Trecând la limită în egalitatea c) se obține $x_n \rightarrow \sqrt{x_0 y_0}$ și $y_n \rightarrow \sqrt{x_0 y_0}$.

Exemplul 8. Fie șirurile $(x_n)_{n \geq 0}, (y_n)_{n \geq 0}$ definite prin

$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}, y_{n+1} = \frac{x_n^2 + y_n^2}{x_n + y_n}, \forall n \in \mathbb{N} \text{ și } 0 < x_0 < y_0.$$

Să se arate că șirurile sunt convergente și au aceeași limită.

Soluție. Prin inducție matematică se stabilește că $x_n > 0, y_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

$$\text{Din } \frac{x_n + y_n}{2} < \frac{x_n^2 + y_n^2}{x_n + y_n} \Leftrightarrow (x_n + y_n)^2 < 2x_n^2 + 2y_n^2 \Leftrightarrow 0 < (x_n - y_n)^2, \text{ de unde se}$$

obține prin inducție $x_{n+1} < y_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$.

$$\text{Din } x_n < y_n \Rightarrow 2x_n < x_n + y_n \Rightarrow x_n < \frac{x_n + y_n}{2} \Rightarrow x_n < x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Din $x_n < y_n$ și $x_n > 0 \Rightarrow x_n^2 < x_n y_n + y_n^2 \Rightarrow x_n^2 + y_n^2 < x_n y_n + y_n^2 \Rightarrow \frac{x_n^2 + y_n^2}{x_n + y_n} < y_n$,

deci $y_{n+1} < y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. S-a stabilit că $x_0 \leq x_n \leq x_{n+1} < y_{n+1} < y_n \leq y_0$. Deci șirurile $(x_n)_{n \geq 0}$, $(y_n)_{n \geq 0}$ sunt monotone și mărginite, deci sunt convergente.

Notăm $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, $a \leq b$ și trecând la limită în relația $x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$ se obține $a = b$.

c) Probleme propuse

1. Se dau șirurile $(a_n)_{n \geq 0}$, $(b_n)_{n \geq 0}$, $a_0 = 2$, $b_0 = 3$ definite prin relațiile de recurență $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$, $b_{n+1} = \frac{7b_n - a_n}{6}$, $n \geq 0$.

a) Notând $c_n = b_n - a_n$ să se calculeze limita șirului $(c_n)_{n \geq 0}$.

b) Să se studieze monotonia șirurilor $(a_n)_{n \geq 0}$, $(b_n)_{n \geq 0}$.

c) Să se exprime $(a_n)_{n \geq 0}$, $(b_n)_{n \geq 0}$ în funcție de n și să se calculeze limitele șirurilor $(a_n)_{n \geq 0}$, $(b_n)_{n \geq 0}$.

d) Fie șirul $(d_n)_{n \geq 0}$ definit prin $d_{2n+1} = a_n$, $d_{2n} = b_n$. Este șirul $(d_n)_{n \geq 0}$ convergent? Câți termeni rămân în afara vecinătății $V = \left(\frac{7}{2} - \frac{1}{4}, \frac{7}{2} + \frac{1}{4}\right)$?

(O.M., faza locală 1975, Brașov)

2. Fie date șirurile $(a_n)_{n \geq 0}$, $(b_n)_{n \geq 0}$ definite prin

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, b_{n+1} = \frac{a_n + 2b_n}{3}, \forall n \geq 0 \text{ și } a_0 < b_0.$$

Să se arate că șirurile $(a_n)_{n \geq 0}$, $(b_n)_{n \geq 0}$ sunt convergente și au aceeași limită.

3. Fie șirurile $(a_n)_{n \geq 0}$, $(b_n)_{n \geq 0}$ definite prin $a_0 < b_0$, $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$,

$b_{n+1} = \frac{a_{n+1} + b_n}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Să se arate că cele două șiruri au aceeași limită.

4. Să se determine în funcție de x_0 , y_0 , n termenii generali ai șirurilor $(x_n)_{n \geq 0}$, $(y_n)_{n \geq 0}$ definite prin $x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$, $y_{n+1} = \frac{x_n + 3y_n}{4}$, $\forall n \geq 0$ și să se studieze convergența șirurilor $(x_n)_{n \geq 0}$, $(y_n)_{n \geq 0}$.

5. Fie șirurile $(x_n)_{n \geq 0}$, $(y_n)_{n \geq 0}$ definite prin $x_0 = y_0 = 1$ și

$$x_{n+1} = 2x_n - 5y_n, y_{n+1} = \frac{1}{3}(x_n - 2y_n), \forall n \geq 0.$$

Să se arate că șirurile sunt convergente și să se afle limitele lor.

6. Să se determine $a \in \mathbb{R}$, astfel ca șirurile $(x_n)_{n \geq 0}$, $(y_n)_{n \geq 0}$ definite prin

$$x_0 = y_0 = 1, x_{n+1} = ax_n + \frac{1}{4}y_n, y_{n+1} = x_n + \frac{1}{2}y_n, \forall n \geq 0 \text{ să fie convergente.}$$

7. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$, $(b_n)_{n \geq 1}$ două șiruri de numere raționale astfel încât

$$(2 + \sqrt{3})^n = a_n + b_n \sqrt{3}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Să se arate că:

$$1) a_{n+1} = 2a_n + 3b_n, b_{n+1} = a_n + 2b_n, \forall n \in \mathbb{N}^*; 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \sqrt{3};$$

$$3) \text{ să se determine soluțiile ecuației } x^2 - 3y^2 = 1, x, y \in \mathbb{Z}.$$

(O.M., etapa locală, Iași 1984)

8. Se consideră șirurile $(a_n)_{n \geq 0}$, $(b_n)_{n \geq 0}$ date prin relațiile $a_{n+1} = a_n + 2b_n$, $b_{n+1} = 4b_n - a_n$, $n \geq 0$ cu $a_0 = 1$, $b_0 = 2$. a) Să se determine termenii generali ai celor două șiruri. b) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$.

9. Să se demonstreze că șirurile $(x_n)_{n \geq 0}$, $(y_n)_{n \geq 0}$ care satisfac relațiile

$$2x_{n+1} = \sqrt{3}x_n + y_n, 2y_{n+1} = -x_n + \sqrt{3}y_n, \forall n \geq 0$$

sunt periodice și au aceeași perioadă. (C.31'8, GM 6 / 1983)

10. Se consideră polinomul cu coeficienți întregi $p(X) = X^2 - 3X + 2$.

a) Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}$ există o pereche unică de numere întregi (a_n, b_n) astfel încât polinomul $q_n(X) = X^n - a_n X - b_n$ să se dividă cu $p(X)$.

b) Să se arate că numerele a_n și b_n satisfac relațiile de recurență

$$a_{n+1} = 3a_n + b_n, b_{n+1} = -2a_n.$$

c) Să se arate că șirul $c_n = a_n + b_n$ este convergent și să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$.

(O.M., etapa finală, 1973)

11. Se dau două șiruri de termeni generali a_n și b_n astfel încât:

$$a_0 < b_0, a_{n+1} = \frac{a_n + 3b_n}{4}, b_{n+1} = \frac{3a_n + 2b_n}{5}, \forall n \geq 0.$$

Se consideră șirurile cu termenii generali c_n , respectiv d_n , definite prin

$$c_n = \begin{cases} a_n, & n \text{ par} \\ b_n, & n \text{ impar} \end{cases}, d_n = \begin{cases} a_n, & n \text{ impar} \\ b_n, & n \text{ par} \end{cases}.$$

Să se arate că: a) Șirul de termen general $(c_n)_{n \geq 0}$ este crescător iar șirul $(d_n)_{n \geq 0}$ descrescător.

b) Șirurile $(a_n)_{n \geq 0}$ și $(b_n)_{n \geq 0}$ au aceeași limită. (O.M., etapa finală, 1974)

12. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$, $(y_n)_{n \geq 0}$ două șiruri definite prin $x_{n+1} = ax_n + by_n$,

$y_{n+1} = cx_n + dy_n$, $\forall n \geq 0$ unde a, b, c, d sunt numere reale fixate, $bc \neq 0$, $ad - bc \neq 0$.

a) Să se arate că cele două șiruri satisfac aceeași relație de recurență liniară de ordinul doi.

b) Să se găsească o condiție necesară și suficientă ca cele două șiruri să fie periodice. (G.M. 1 / 1985 20323)

13. Fie $x_0 = a$, $y_0 = b$ și șirurile $(x_n)_{n \geq 0}$, $(y_n)_{n \geq 0}$ definite prin relațiile

$$x_{n+1} = ax_n - by_n, y_{n+1} = bx_n + ay_n, \forall n \in \mathbb{N} \text{ unde } a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 < 1.$$

Să se determine $A \in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$, $n \geq 0$ și să se

calculeze A^n , $n \geq 2$. Să se arate că șirurile $(x_n)_{n \geq 0}$, $(y_n)_{n \geq 0}$ sunt convergente și să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.

14. Se dau șirurile $(x_n)_{n \geq 0}$, $(y_n)_{n \geq 0}$ definite prin relațiile $x_{n+1} = \frac{px_n + qy_n}{p+q}$, $y_{n+1} = \frac{mx_n + ky_n}{m+k}$, $\forall n \geq 0$ unde $pk > mq$, $m, k, p, q, n \in \mathbb{N}^*$ și $x_0 < y_0$. Să se arate că $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < \dots < y_n < \dots < y_2 < y_1 < y_0$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.

15. Se dau numerele reale a, b , $0 < a < b$ și numerele naturale p, q cu ajutorul cărora se definesc șirurile $(x_n)_{n \geq 0}$, $(y_n)_{n \geq 0}$ date prin $x_0 = a$, $y_0 = b$, $x_{n+1} = \frac{x_n + py_n}{1+p}$, $y_{n+1} = \frac{x_n + qy_n}{1+q}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $p, q \in \mathbb{N}^*$. Să se stabilească relația dintre p și q astfel încât cele două șiruri să fie convergente la aceeași limită.

16. Se dau șirurile $(x_n)_{n \geq 0}$, $(y_n)_{n \geq 0}$ definite prin $x_{n+1} = \frac{5x_n + y_n}{6}$, $y_{n+1} = \frac{2x_n + y_n}{3}$, $\forall n \geq 0$, $x_0 = 1$, $y_0 = 6$.

Să se arate că șirurile $(x_n)_{n \geq 0}$, $(y_n)_{n \geq 0}$ converg la aceeași limită.

17. 1) Să se demonstreze că există șirurile $(a_n)_{n \geq 1}$, $(b_n)_{n \geq 1}$ cu $a_n, b_n \in \mathbb{N}$ unic determinate astfel încât $(4 + \sqrt{15})^n = a_n + b_n \sqrt{15}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. 2) Să se demonstreze că $a_n^2 - 15b_n^2 = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. 3) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$.

18. Fie șirurile $(x_n)_{n \geq 0}$, $(y_n)_{n \geq 0}$ care satisfac relațiile $x_{n+1} = 2x_n + y_n$, $y_{n+1} = 2x_n + 3y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. a) Să se calculeze termenii generali ai șirurilor $(x_n)_{n \geq 0}$, $(y_n)_{n \geq 0}$, știind că $x_0 = y_0 = 3$. b) Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{2}$.

19. Fie șirurile $(x_n)_{n \geq 0}$, $(y_n)_{n \geq 0}$ definite prin relațiile de recurență

$$x_{n+1} = 3x_n + 4y_n, y_{n+1} = 2x_n + 3y_n, \forall n \geq 0, x_0 = 3, y_0 = 2.$$

Să se demonstreze că șirul $(z_n)_{n \geq 0}$ definit prin relația $z_n = 1 + 4x_n^2 y_n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$, nu conține nici un număr prim.

20. Se consideră șirurile $(x_n)_{n \geq 0}$, $(y_n)_{n \geq 0}$, $(z_n)_{n \geq 0}$ definite prin relațiile

$$x_{n+1} = 3x_n + 8y_n, y_{n+1} = x_n + 3y_n, \forall n \in \mathbb{N}, x_0 = 3, y_0 = 1 \text{ și } z_n = 1 + 16x_n^2 y_n^2.$$

Să se arate că șirul $(z_n)_{n \geq 0}$ este format numai din numere compuse.

21. Să se determine $k \in \mathbb{R}^*$ astfel încât șirurile reale $(a_n)_{n \geq 0}$, $(b_n)_{n \geq 0}$ definite prin $a_0 = 0$, $b_0 = 1$, $a_{n+1} = k(a_n + b_n)$, $b_{n+1} = k(-a_n + b_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, să fie periodice și să se precizeze perioada fiecăruia.

22. Să se arate că șirurile reale $(x_n)_{n \geq 0}$, $(y_n)_{n \geq 0}$ care satisfac relațiile

$$x_{n+1} = \cos \frac{2\pi}{m} x_n + \sin \frac{2\pi}{m} y_n, y_{n+1} = -\sin \frac{2\pi}{m} x_n + \cos \frac{2\pi}{m} y_n, \forall n \in \mathbb{N}$$

(unde $m \in \mathbb{N}^*$ este fixat) sunt periodice și au aceeași perioadă.

23. Fie șirurile $(x_n)_{n \geq 0}$, $(y_n)_{n \geq 0}$ definite prin $x_{n+1} = \frac{2x_n + y_n}{3}$, $y_{n+1} = \frac{x_n + 2y_n}{3}$, $\forall n \geq 0$, $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$. Să se arate că șirurile $(x_n)_{n \geq 0}$, $(y_n)_{n \geq 0}$ sunt convergente și să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.

§6. Sisteme de trei recurențe

a) Exemple rezolvate

La rezolvarea exercițiilor din acest paragraf vom pune în evidență câteva metode de rezolvare a acestor probleme.

Exemplul 1. Se dau $a_0, b_0, c_0 \in \mathbb{R}$. Se definesc șirurile $(a_n)_{n \geq 0}$, $(b_n)_{n \geq 0}$, $(c_n)_{n \geq 0}$ prin relațiile de recurență $a_{n+1} = \frac{b_n + c_n}{2}$, $b_{n+1} = \frac{a_n + c_n}{2}$, $c_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Să se arate că șirurile sunt convergente către $\frac{a_0 + b_0 + c_0}{3}$. (O.M., județ, 1976)

Soluții.

Metoda 1. Adunând cele trei relații, obținem $a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} = a_n + b_n + c_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, din care rezultă că $a_n + b_n + c_n = a_0 + b_0 + c_0 = k$, $\forall n \in \mathbb{N}$ deci $b_n + c_n = k - a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Se obține $2a_{n+1} = k - a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, care este relație de recurență

$$\text{liniară de ordinul întâi cu soluția } a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n a_0 + \frac{k}{2} \cdot \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1 + \frac{1}{2}}.$$

Ținând seama că $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$, șirul $(a_n)_{n \geq 0}$ este convergent cu $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{k}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{k}{3} = \frac{a_0 + b_0 + c_0}{3}$. La fel se arată că $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \frac{a_0 + b_0 + c_0}{3}$.

Metoda 2. Sistemul relațiilor de recurență se scrie sub forma unei ecuații

$$\text{matriceale: } \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbb{N} \text{ unde } A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ de}$$

unde rezultă (*) $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$. Pentru a obține termenul general al fiecărui șir

$(a_n)_{n \geq 0}, (b_n)_{n \geq 0}, (c_n)_{n \geq 0}$ calculăm $A^n, n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$A^2 = \frac{1}{2^2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Se observă că (***) $A^n = \frac{1}{2^n} \begin{pmatrix} x_n & y_n & y_n \\ y_n & x_n & y_n \\ y_n & y_n & x_n \end{pmatrix}$. Pentru

șirurile $(x_n)_{n \geq 0}, (y_n)_{n \geq 0}$, găsim condițiile

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2y_n \\ y_{n+1} = x_n + y_n \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 0 \text{ și } \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2, \end{cases} \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = 1. \end{cases}$$

Înlocuind pe x_n din prima relație în relația a doua se obține (1) $y_{n+1} = y_n + 2y_{n-1}$, $\forall n \geq 2$ o relație de recurență liniară de ordinul doi cu coeficienți constanți. Ecuația caracteristică corespunzătoare relației (1) este $r^2 = r + 2$, cu $r_1 = -1$, $r_2 = 2$. Deci $y_n = c_1(-1)^n + c_2 \cdot 2^n$ și pentru $n = 1$ și $n = 2$ se obține

$$c_1 = -\frac{1}{3}, c_2 = \frac{1}{3} \text{ deci } y_n = \frac{(-1)^{n+1}}{3} + \frac{1}{3} \cdot 2^n \text{ și } x_n = \frac{2}{3}(-1)^n + \frac{2^n}{3}.$$

Folosind formulele (*) și (**) găsim expresiile termenilor generali:

$$\begin{cases} x_n = \frac{2}{3} \cdot \frac{(-1)^n}{2^n} x_0 + \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} y_0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} z_0 + \frac{x_0 + y_0 + z_0}{3} \\ y_n = \frac{1}{3} \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} x_0 + \frac{2}{3} \cdot \frac{(-1)^n}{2^n} y_0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} z_0 + \frac{x_0 + y_0 + z_0}{3} \\ z_n = \frac{1}{3} \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} x_0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} y_0 + \frac{2}{3} \cdot \frac{(-1)^n}{2^n} z_0 + \frac{x_0 + y_0 + z_0}{3} \end{cases}$$

Se obține imediat că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \frac{x_0 + y_0 + z_0}{3}$.

Exemplul 2. Fie șirurile $(a_n)_{n \geq 0}, (b_n)_{n \geq 0}, (c_n)_{n \geq 0}$ definite prin sistemul de relații

de recurență $a_{n+1} = \frac{2b_n + c_n}{3}, b_{n+1} = \frac{2c_n + a_n}{3}, c_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{3}, \forall n \in \mathbb{N}$ unde a_0, b_0, c_0 sunt numere reale fixate. Să se determine termenii generali ai șirurilor și să se arate că șirurile sunt convergente la aceeași limită $\frac{a_0 + b_0 + c_0}{3}$.

Soluție. Folosind matricea $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ avem $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Pentru a calcula A^n vom întrebuința următoarea metodă. Matricea A satisface ecuația caracteristică $A^3 - (\text{Tr } A) A^2 + S(A) - \det A \cdot I_3 = O_3$ unde $\text{Tr } A = 0$,

$$S(A) = \begin{vmatrix} 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 \end{vmatrix} = -2, \det A = \frac{1}{3}, \text{ deci:}$$

$A^3 = \frac{2}{3}A + \frac{1}{3}I_3, A^3 = x_3A^2 + y_3A + z_3I$ și condițiile inițiale $x_3 = 0$,

$y_3 = \frac{2}{3}, z_3 = \frac{1}{3}$. Dacă $A^n = x_nA^2 + y_nA + z_nI_3$ atunci $A^{n+1} = x_{n+1}A^2 + y_{n+1}A + z_{n+1}I_3 =$

$= A^n \cdot A = (x_nx_n + y_n)A^2 + (y_nx_n + z_n)A + z_nx_nI_3$ de unde rezultă sistemul relațiilor de recurență (pentru $\forall n \in \mathbb{N}$). $x_{n+1} = y_n, y_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + z_n, z_{n+1} = \frac{1}{3}x_n$. Din primele

două egalități obținem $x_{n+1} = \frac{2}{3}x_{n-1} + \frac{1}{3}x_{n-2}$ și ecuația caracteristică asociată

ultimei relații de recurență este $r^3 = \frac{2}{3}r + \frac{1}{3}$; prin rezolvarea ecuației se obțin

rădăcinile $r_1 = 1$ și $r_{2,3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \pm i \frac{1}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\cos \frac{5\pi}{6} \pm i \sin \frac{5\pi}{6} \right)$. Rezultă

$x_n = c_1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right)^n \left(c_2 \cos \frac{5n\pi}{6} + c_3 \sin \frac{5n\pi}{6} \right)$. Ținând seama că $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 0$

se obține $c_1 = \frac{3}{7}, c_2 = -\frac{3}{7}, c_3 = -\frac{9\sqrt{3}}{7}$. Găsim imediat $y_n = x_{n+1}, z_n = \frac{1}{3}x_{n-1}$.

Urmează imediat $x_n \rightarrow \frac{3}{7}, y_n \rightarrow \frac{3}{7}, z_n \rightarrow \frac{1}{7}$. După explicitarea lui A^n găsim

$$a_n = \frac{1}{9} [(4x_n + 9z_n)a_0 + (x_n + 6y_n)b_0 + (4x_n + 3y_n)c_0] \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{7} [(12+9)a_0 + (3+18)b_0 + (12+9)c_0] = \frac{1}{3}(a_0 + b_0 + c_0).$$

Analog, $b_n \rightarrow \frac{1}{3}(a_0 + b_0 + c_0), c_n \rightarrow \frac{1}{3}(a_0 + b_0 + c_0)$.

Observații. 1) O matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$ se numește simplu stochastică după linii, dacă toate elementele sale sunt numere reale, pozitive și cu suma elementelor de pe fiecare linie egală cu 1.

În teoria proceselor Markov, la teoria probabilităților, se stabilește că dacă A este o matrice simplu stochastică după linii (sau după coloane), atunci există relația $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = B$, unde B este o matrice simplu stochastică după linii (sau după coloane) ca și A .

2) În cazul în care A este o matrice dublu stochastică (și după linii și după

coloane) atunci există $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = B$ unde B este o matrice dublu stochastică cu

toate liniile și coloanele identice, adică $B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Cum A este matrice dublu

stochastică și

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} \text{ atunci } \begin{pmatrix} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \\ \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \\ \lim_{n \rightarrow \infty} c_n \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = \frac{a_0 + b_0 + c_0}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exemplul 3. Se consideră numerele $a, b, c \in (0, 1)$ $a + b + c = 1$ și șirurile

$(a_n)_{n \geq 0}, (b_n)_{n \geq 0}, (c_n)_{n \geq 0}$ definite prin $\begin{cases} a_{n+1} = aa_n + bb_n + cc_n \\ b_{n+1} = ba_n + cb_n + ac_n \\ c_{n+1} = ca_n + ab_n + bc_n \end{cases}, \forall n \geq 0, n \in \mathbb{N}$ cu

$a_0 = a, b_0 = b, c_0 = c$. Fie șirurile $(x_n)_{n \geq 0}, (y_n)_{n \geq 0}$ definite prin

$x_n = \min(a_n, b_n, c_n), y_n = \max(a_n, b_n, c_n)$. Să se arate că

1) șirurile $(x_n)_{n \geq 0}, (y_n)_{n \geq 0}$ sunt convergente și au aceeași limită;

2) șirurile $(a_n)_{n \geq 0}, (b_n)_{n \geq 0}, (c_n)_{n \geq 0}$ sunt convergente și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \frac{1}{3}.$$

Soluție. 1) Adunând cele trei relații ale sistemului se obține

$$a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} = a_n + b_n + c_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Din relațiile de recurență rezultă că $a_n, b_n, c_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Deci $a_n + b_n + c_n = a_0 + b_0 + c_0 = a + b + c = 1, \forall n \in \mathbb{N}$ de unde obținem

$$x_n \leq \frac{a_n + b_n + c_n}{3} \leq y_n, \forall n \in \mathbb{N}. \text{ Din } x_n = \min(a_n, b_n, c_n) \text{ rezultă } x_n \leq a_n, x_n \leq b_n,$$

$$x_n \leq c_n \text{ și } ax_n + bx_n + cx_n \leq aa_n + bb_n + cc_n = a_{n+1} \text{ deci } x_n \leq a_{n+1}, \text{ analog } x_n \leq b_{n+1},$$

$$x_n \leq c_{n+1} \text{ deci } x_n \leq x_{n+1}, \text{ analog rezultă } y_n \geq y_{n+1}, \text{ de unde se obține că } x_n \leq \frac{1}{3} \leq y_n.$$

Deci șirurile $(x_n)_{n \geq 0}, (y_n)_{n \geq 0}$ sunt conform teoremei lui Weierstrass

convergente și $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \frac{1}{3} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$. Avem $x_{n+1} = \alpha_0 x_n + \alpha_1 y_n + \alpha_2 z_n$ unde

$\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2\} = \{a, b, c\}$, iar $\{z_n\} = \{a_n, b_n, c_n\} - \{x_n, y_n\}$ deci $x_n \leq z_n \leq y_n$.

Urmează $x_{n+1} > (\alpha_0 + \alpha_2) x_n + \alpha_1 y_n$ sau $x_{n+1} > (1 - \alpha_1) x_n + \alpha_1 y_n$.

$$x_{n+1} - x_n \geq \alpha_1 (y_n - x_n), 0 \leq y_n - x_n \leq \frac{x_{n+1} - x_n}{\alpha_1} \rightarrow 0$$

de unde rezultă că șirurile $(x_n)_{n \geq 0}, (y_n)_{n \geq 0}$ au aceeași limită $x_n < a_n \leq y_n$, deci

și $a_n \rightarrow l$. Analog $b_n \rightarrow l, c_n \rightarrow l$. Deci $a_n + b_n + c_n = 1 \Rightarrow 3l = 1, l = \frac{1}{3}$ de unde

se obține că $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \frac{1}{3}$.

Exemplul 4. Fie $a_1, b_1, c_1 \in (0, +\infty)$, cu $a_1 + b_1 + c_1 = 1$ și șirurile $(a_n)_{n \geq 1},$

$(b_n)_{n \geq 1}, (c_n)_{n \geq 1}$ definite prin relațiile (1) $\begin{cases} a_{n+1} = a_n^2 + 2b_n c_n \\ b_{n+1} = b_n^2 + 2a_n c_n \\ c_{n+1} = c_n^2 + 2a_n b_n \end{cases}, \forall n \geq 1.$

Să se arate că șirurile $(a_n)_{n \geq 1}, (b_n)_{n \geq 1}, (c_n)_{n \geq 1}$ sunt convergente.

Soluție. Prin adunarea relațiilor se obține (2) $a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} = (a_n + b_n + c_n)^2, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Prin inducție se demonstrează că

(3) $a_n + b_n + c_n = 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ și $a_n, b_n, c_n \in (0, +\infty)$. Definim șirurile $x_n = \min(a_n, b_n, c_n), y_n = \max(a_n, b_n, c_n), \forall n \in \mathbb{N}^*$. Intenționăm să arătăm că au loc inegalitățile

(4) $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \dots \leq y_{n+1} \leq y_n \leq \dots \leq y_2 \leq y_1$ și

(5) $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) = 0$.

Conform criteriului cleștelui va rezulta că $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l \in \mathbb{R}$ și folosind că

$x_n \leq a_n \leq y_n$ rezultă $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$. Analog pentru șirurile $(b_n)_{n \geq 1}, (c_n)_{n \geq 1}$ de unde va

rezulta $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \frac{1}{3}$. Pentru a demonstra (4) vom presupune că

$a_n \geq b_n \geq c_n$. Atunci în relațiile (1) părțile din dreapta sunt mai mici decât

$$a_n^2 + a_n b_n + a_n c_n = a_n (a_n + b_n + c_n) = a_n \text{ și mai mari decât } c_n^2 + b_n c_n + a_n c_n = c_n.$$

Deci $y_{n+1} \leq y_n$ și $x_{n+1} \geq x_n$ q.e.d. Pentru a demonstra (5), presupunem $a_n \geq b_n \geq c_n$.

Notăm $a_n - b_n = \alpha \geq 0, b_n - c_n = \beta \geq 0, a_n - c_n = \gamma \geq 0, \gamma = \alpha + \beta$ atunci

$$\begin{aligned} |a_{n+1} - b_{n+1}| &= |a_n^2 + 2b_n c_n - 2a_n c_n - b_n^2| = |a_n - b_n| |a_n + b_n - 2c_n| = \alpha(\alpha + \beta) = \\ &= (\alpha - \beta)(\alpha + \beta) \leq \gamma^2, |a_{n+1} - c_{n+1}| = |a_n - c_n| |a_n + c_n - 2b_n| = \gamma(\alpha - \beta) \leq \gamma(\alpha + \beta) = \gamma^2, \\ |b_{n+1} - c_{n+1}| &= |b_n - c_n| |b_n + c_n - 2a_n| = \beta(\alpha + \gamma) = (\gamma - \alpha)(\gamma + \alpha) \leq \gamma^2 \end{aligned}$$

ultimele trei inegalități arată că $y_{n+1} - x_{n+1} \leq (y_n - x_n)^2, \forall n \in \mathbb{N}^*$, din $y_1 < 1, x_1 > 0$ rezultă $y_1 - x_1 < 1$, deci $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) = 0$ q.e.d.

b) Probleme propuse

1. Șirurile de numere reale $(x_n)_{n \geq 0}, (y_n)_{n \geq 0}, (z_n)_{n \geq 0}$ cu proprietatea că există $a, b, c \in \mathbb{R}$ cu $|a + b + c| < 1$ și $ab + ac + bc = 0$, astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N}$ să

$$\text{aibă loc. sistemul de recurențe } \begin{cases} x_{n+1} = ax_n + by_n + cz_n \\ y_{n+1} = cx_n + ay_n + bz_n \\ z_{n+1} = bx_n + cy_n + az_n \end{cases}$$

Să se demonstreze că cele trei șiruri sunt convergente și să se calculeze limita fiecăruia.

$$2. \text{ Fie matricea } A = \begin{pmatrix} a & 2c & 2b \\ b & a & 2c \\ c & b & a \end{pmatrix}. \text{ Să se calculeze } A^n, n \in \mathbf{N}^*.$$

3. Se dau șirurile $(x_n)_{n \geq 0}, (y_n)_{n \geq 0}, (z_n)_{n \geq 0}$, definite prin

$$x_{n+1} = \sqrt{y_n z_n}, y_{n+1} = \sqrt{x_n z_n}, z_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, \forall n \in \mathbf{N} \text{ unde } x_0, y_0, z_0 > 0.$$

a) Să se studieze convergența șirurilor $(x_n)_{n \geq 0}, (y_n)_{n \geq 0}, (z_n)_{n \geq 0}$ și să se calculeze limitele lor.

b) Să se scrie termenii generali ai șirurilor $(x_n)_{n \geq 0}, (y_n)_{n \geq 0}, (z_n)_{n \geq 0}$ și să se verifice a).

§ 7. Recurențe definite de funcții

a) Aspecte teoretice

Definiția 1. Fie funcția $f: A \rightarrow A, A \subset \mathbf{R}$. Șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ definit prin $x_{n+1} = f(x_n)$, $\forall n \in \mathbf{N}, x_0 \in A$, se numește *șir recurent definit de funcția f* și $x_0 \in A$ (sau șirul aproximațiilor succesive asociat funcției f și elementului $x_0 \in A$).

Din teorema 2 din I §2, rezultă că șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ definit de funcția f există și este unic.

Definiția 2. Fie funcția $f: A \rightarrow A; x_0 \in A$ este *punct fix pentru funcția f* dacă $f(x_0) = x_0$.

În cele ce urmează vom studia dacă șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ asociat funcției f este convergent sau nu.

Dacă șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ asociat funcției continue $f: A \rightarrow A$ și elementului x_0 este convergent, atunci converge la un element $l \in A$ astfel încât $f(l) = l$, deci la un punct fix al lui f . Deducem că dacă f este continuă și nu are puncte fixe, atunci șirul asociat funcției f nu converge la nici un element din A .

O funcție $f: A \rightarrow A$ poate să nu aibă puncte fixe, poate avea un singur punct fix sau un număr finit neunitar de puncte fixe, sau o infinitate de puncte fixe. Pentru funcția $f: A \rightarrow A, A \subset \mathbf{R}$, reamintim următoarele propoziții despre puncte fixe:

P₁. Fie funcția $f: A \rightarrow A, A \subset \mathbf{R}$, crescătoare, atunci ecuațiile $f(x) = x$ și $f(f(x)) = x$, admit aceleași soluții (adică funcțiile f și $f \circ f$ admit aceleași puncte fixe).

P₂. Fie A o mulțime și $f: A \rightarrow A$, o funcție cu proprietatea că există $n \in \mathbf{N}, n \geq 1$

astfel încât funcția $\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ ori}} = f_n$ are un singur punct x_0 , atunci $f(x_0) = x_0$.

P₃. Fie funcția f crescătoare, $f: [a, b] \rightarrow [a, b], a < b$ atunci există $c \in [a, b]$, astfel încât $f(c) = c$ (Teorema de punct fix a lui Knaster).

P₄. Fie funcția $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$. Dacă f este continuă pe $[a, b]$, atunci există $c \in [a, b]$ astfel încât $f(c) = c$.

P₅. Fie funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. Dacă f este continuă și mărginită pe $\mathbf{R}$, atunci există $c \in \mathbf{R}$, astfel încât $f(c) = c$.

În cele ce urmează vom prezenta câteva teoreme de convergență a șirurilor recurente definite de funcția f .

Teorema 1. Fie funcția $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$ continuă pe $[a, b]$, iar șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ definit prin $x_{n+1} = f(x_n), \forall n \geq 0, x_0 \in [a, b]$.

a) Dacă funcția f este crescătoare pe $[a, b]$, atunci șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este monoton și convergent la soluția ecuației $f(x) = x, x \in [a, b]$.

b) Dacă funcția f este descrescătoare, atunci șirurile $(x_{2n})_{n \geq 0}$ și $(x_{2n+1})_{n \geq 0}$ sunt monotone, de monotonii diferite.

Demonstrație. a) Dacă $x_1 = f(x_0), x_1 \geq x_0$, atunci $x_{n+1} \geq x_n, \forall n \in \mathbf{N}$, rezultat ce se stabilește prin inducție matematică.

$P(n): x_{n+1} \geq x_n, n \in \mathbf{N}$.

$P(0): x_1 \geq x_0$ adevărată și presupunem adevărată $P(k): x_{k+1} \geq x_k, k \in \mathbf{N}, k \geq 0$.

$P(k+1): x_{k+2} \geq x_{k+1}$; aplicăm inegalitatea $x_{k+1} \geq x_k$ funcției f crescătoare $\Rightarrow \Rightarrow f(x_{k+1}) \geq f(x_k) \Rightarrow x_{k+2} \geq x_{k+1}$, deci $P(k) \Rightarrow P(k+1), \forall k \in \mathbf{N}$, deci $P(n)$ adevărată $\forall n \in \mathbf{N}$, deci $x_{n+1} \geq x_n$.

Deci, șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este crescător și mărginit, $x_n \in [a, b]$ și conform teoremei lui Weierstrass este convergent $x_n \rightarrow l, a \leq x_n \leq b \Rightarrow a \leq l \leq b$.

Din $x_{n+1} = f(x_n)$, trecând la limită și folosind continuitatea se obține $f(l) = l$, deci l este soluția ecuației $f(x) = x$ (l punct fix a lui f).

b) Funcția f fiind continuă și descrescătoare rezultă că funcția $f \circ f$ este continuă și crescătoare. Rezultatul de la a) se aplică funcției $f \circ f$.

$$x_1 = f(x_0), \quad x_2 = f(f(x_0)),$$

$$x_3 = f(x_2), \quad x_4 = f(f(x_2)),$$

$$\dots \dots \dots$$

$$x_{2n+1} = f(x_{2n}), \quad x_{2n+2} = f(f(x_{2n})),$$

de unde rezultă că subșirul $(x_{2n})_{n \geq 0}$ este monoton și mărginit, deci este convergent. Fie $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = l$. Pe de altă parte

$$x_3 = f(x_2) = f(f(x_1)),$$

$$x_5 = f(x_4) = f(f(x_3)),$$

$$\dots \dots \dots$$

$$x_{2n+1} = f(x_{2n}) = f(f(x_{2n-1})).$$

Dacă $x_{2n} < x_{2n+2}$, atunci $x_{2n+1} = f(x_{2n}), x_{2n+2} = f(x_{2n+1}), x_{2n+3} = f(x_{2n+2})$, deci $x_{2n+3} < x_{2n+2} = f(x_{2n+1}) \leq x_{2n+1}$ și $x_{2n+3} \leq x_{2n+1}$, rezultă că dacă șirul $(x_{2n})_{n \geq 0}$ este

crescător, atunci șirul (x_{2n+1}) este descrescător și reciproc.

Consecință. Dacă $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă și nu are puncte fixe, atunci șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ definit de funcția f și $x_0 \in [a, b]$ nu este convergent.

b) Exemple

Exemplul 1. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ definit prin $x_{n+1} = \frac{2+x_n}{3+x_n}$, $n \geq 0$ și $x_0 = \frac{1}{2}$. Să se arate că șirul (x_n) este convergent și să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, $\sup x_n$, $\inf x_n$.

Soluție. Prin inducție se demonstrează că $x_n \in [0, 1]$.

Fie funcția $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $f(x) = \frac{2+x}{3+x}$, continuă și

$$f'(x) = \frac{3+x-2-x}{(3+x)^2} = \frac{1}{(3+x)^2}, \text{ deci } \left[\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right] \subset [0, 1].$$

x	0	1
f'	+++++	+++++
f	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$

Deci, funcția f este continuă și strict crescătoare pe $[0, 1] \Rightarrow$ șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ asociat funcției f și $x_0 = \frac{1}{2}$ este monoton

$$x_1 = \frac{2+x_0}{3+x_0} = \frac{2+\frac{1}{2}}{3+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{7}{2}} = \frac{5}{7} = \frac{10}{14}, \quad x_0 = \frac{1}{2} = \frac{7}{14}, \text{ deci } x_1 > x_0.$$

Deci, șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este strict crescător și mărginit și conform teoremei precedente va converge la soluția ecuației $f(l) = l$.

$$\frac{2+x}{3+x} = x \Rightarrow x^2 + 3x = x + 2 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{3}.$$

$$\text{Deci, } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -1 + \sqrt{3} \in (0, 1) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -1 + \sqrt{3} = \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n, \inf_{n \in \mathbb{N}} x_n = \frac{1}{2}.$$

Exemplul 2. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ definit prin $x_{n+1} = \sqrt{1-x_n}$, $n \geq 0$, $x_0 = \sqrt{1-a}$, $a \in (0, 1)$. Să se arate că șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este convergent și să se calculeze

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Soluție. Se demonstrează prin inducție că $x_n \in (0, 1)$.

Se consideră funcția $f: (0, 1) \rightarrow (0, 1)$, continuă pe $(0, 1)$.

$$f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} < 0, \quad \forall x \in (0, 1), \text{ deci funcția este strict descrescătoare pe}$$

$(0, 1)$. Subșirul $(x_{2n})_{n \geq 0}$ este strict descrescător, iar $(x_{2n+1})_{n \geq 0}$ este strict crescător. Prin inducție se demonstrează că:

$$x_1 < x_3 < \dots < x_{2n+1} < \dots < \frac{\sqrt{5}-1}{2} < \dots < x_{2n} < \dots < x_2 < x_0.$$

Conform teoremei lui Weierstrass rezultă că cele două subșiruri sunt convergente: $x_{2n} \rightarrow a$, $x_{2n+1} \rightarrow b$, $b \leq a$. Trecând la limită în relația de recurență se obține că $a = b$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Exemplul 3. Să se arate că șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ definit prin $x_{n+1} = \sqrt[3]{6+x_n}$, $n \geq 0$, $x_0 = \sqrt[3]{6}$, este convergent.

Soluție. Se demonstrează prin inducție că $x_n \in (1, 2)$.

$$\text{Fie funcția } f: [1, 2] \rightarrow [1, 2], f(x) = \sqrt[3]{6+x}, f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(6+x)^2}} > 0.$$

x	1	2
f'	+++++	+++++
f	$\sqrt[3]{7}$	2

Deci f este continuă și strict crescătoare pe $[1, 2]$ (deci șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ asociat funcției f , conform teoremei 1 este convergent la soluția ecuației) $f(x) = x$, $\sqrt[3]{6+x} = x \Rightarrow x^3 = 6+x$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2 \in [1, 2]$.

Observație. Se putea studia convergența șirului $(x_n)_{n \geq 0}$ și astfel:

$P_1(n): x_n \in (1, 2); P_2(n): x_{n+1} > x_n$. Conform teoremei lui Weierstrass rezultă că (x_n) este convergent; $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$. Trecând la limită în relația de recurență se obține

$$l = \sqrt[3]{6+l} \Rightarrow l = 2 \in [1, 2], \text{ deci } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2 = \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n, \inf_{n \in \mathbb{N}} x_n = \sqrt[3]{6}.$$

Definiția 3. Funcția $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$ se numește **contractie**, dacă există $k \in (0, 1)$ astfel încât $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$, $\forall x, y \in A$.

Teorema 2. Dacă $f: A \rightarrow A$ este o contractie pe mulțimea A , $A \subset \mathbb{R}$, atunci:

1) există un unic $x^* \in A$ încât $f(x^*) = x^*$ (adică f are un punct fix unic) (Teorema de punct fix a lui Banach),

2) orice șir recurent $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \geq 0$, $x_0 \in A$, converge la x^* .

Demonstrație. Funcția f fiind o contractie există $k \in (0, 1)$ astfel încât $\forall x, y \in A$ are loc $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$. Se demonstrează prin inducție

$$|x_{n+1} - x_n| \leq k^n |x_1 - x_0|.$$

$$\begin{aligned} \text{Se obține } |x_{n+p} - x_n| &\leq |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + |x_{n+p-1} - x_{n+p-2}| + \dots + |x_{n+1} - x_n| \leq \\ &\leq (k^{n+p} + k^{n+p-1} + \dots + k^n) |x_1 - x_0| = k^n (1 + k + \dots + k^p) |x_1 - x_0| = k^n \frac{1 - k^{p+1}}{1 - k}. \end{aligned}$$

$|x_1 - x_0| \leq \frac{k^n}{1 - k} |x_1 - x_0|$, de unde ținând seama că $\lim_{n \rightarrow \infty} k^n = 0$, obținem că șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este fundamental și, deci, din criteriul lui Cauchy rezultă că există $x^* \in \mathbb{R}$

astfel încât $x_n \rightarrow x^*$. A fiind închisă și f continuă, $x^* \in A$, $x_n \rightarrow x^*$, trecând la limită în relația de recurență $x_{n+1} = f(x_n) \Rightarrow x^* = f(x^*)$, unde x^* este punct fix pentru funcția f .

Unicitatea rezultă imediat prin reducere la absurd. Presupunem că ar exista $y \in A$ cu proprietatea $y = f(y)$, atunci $0 < |x^* - y| = |f(x^*) - f(y)| \leq k|x^* - y|$ este contradicție, deci $x^* = y$.

Exemplul 4. Să se arate că șirul $(x_n)_{n \geq 0}$, definit prin $x_{n+1} = \frac{1}{2+x_n}$, $n \geq 0$, $x_0 > 0$, este convergent și să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Soluție. Fie funcția $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $f(x) = \frac{1}{2+x}$, și șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ asociat funcției f . Se observă că funcția f este o contracție deoarece $\forall x, y \in [0, \infty)$ $|f(x) - f(y)| = \left| \frac{1}{2+x} - \frac{1}{2+y} \right| = \left| \frac{y-x}{(2+x)(2+y)} \right| \leq \frac{1}{4}|x-y|$, deci șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este convergent la punctul fix $f(x) = x$, $\frac{1}{2+x} = x \Rightarrow x^2 + 2x - 1 = 0$, $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$. $x = \sqrt{2} - 1 \in [0, \infty)$, deci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{2} - 1$ conform teoremei 2.

Exemplul 5. Să se arate că șirul $(x_n)_{n \geq 0}$, definit prin $x_{n+1} = \frac{1}{2} \sin x_n$, $n \geq 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$, este convergent și să se afle limita șirului.

Soluție. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2} \sin x$. Se observă că funcția f este o contracție deoarece $\forall x, y \in \mathbb{R}$ $|f(x) - f(y)| = \left| \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{2} \sin y \right| =$

$$= \frac{1}{2} |\sin x - \sin y| = \frac{1}{2} \left| 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2} \right| \leq \frac{1}{2} \cdot 2 \frac{|x-y|}{2} = \frac{1}{2} |x-y|, \text{ deci}$$

șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este convergent la soluția ecuației $\frac{1}{2} \sin x = x$, $x = 0$, deci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Teorema 3. Dacă $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$ derivabilă și $|f'(x)| < 1$, $\forall x \in [a, b]$, atunci

a) ecuația $f(x) = x$ are soluție unică;

b) șirul $(x_n)_{n \geq 0}$, definit prin $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \geq 0$ și $x_0 \in [a, b]$, este convergent la soluția ecuației $f(x) = x$.

Demonstrație a) Funcția f fiind continuă pe $[a, b]$, are un punct fix; unicitatea rezultă prin reducere la absurd: dacă ar exista $u \neq v$ astfel încât $u = f(u)$, $v = f(v)$, am avea $|u - v| = |f(u) - f(v)| = |f'(c)| \cdot |u - v| < |u - v|$, fals.

b) Conform a) rezultă $|f'(x)| < 1$, $\forall x \in [a, b]$ și aplicând teorema lui Lagrange se obține $|f(x) - f(y)| = |f'(c)| \cdot |x - y| \leq k|x - y|$, deci f este o contracție; conform teoremei 2, rezultă că șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este convergent la unica

soluție a ecuației $f(x) = x$.

Exemplul 6. Să se arate că șirul $(x_n)_{n \geq 0}$, definit prin $x_{n+1} = \frac{1}{4+x_n^2}$, $n \geq 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$, este convergent și să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Soluție. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{4+x^2}$. Se observă că $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+4)^2}$, iar

$$f''(x) = \frac{6x^2 - 8}{(x^2 + 4)^3}.$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{4}{3}}$	$\sqrt{\frac{4}{3}}$	$+\infty$	
f''	+++++	0	-----	0	+++++
f'	0	$\frac{\sqrt{3}}{64}$	$-\frac{\sqrt{3}}{64}$	0	

Rezultă $|f'(x)| \leq \frac{\sqrt{3}}{64} < 1$. Conform teoremei 3, șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este convergent

la soluția ecuației $f(x) = x \Leftrightarrow \frac{1}{4+x^2} = x \Leftrightarrow x^3 + 4x - 1 = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in (0, 1)$.

Exemplul 7. Să se arate că șirul $(x_n)_{n \geq 0}$, definit prin $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$, $n \geq 0$, $x_0 > 0$, $a \in (0, +\infty)$, este convergent și să se afle $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Soluție. Se arată prin inducție că $x_n \geq \sqrt{a}$, $n \geq 1$.

Fie $f: [\sqrt{a}, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x} \right)$, $f'(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2 - a}{x^2} \right)$. Se observă că

$$|f'(x)| = \frac{1}{2} \left| \frac{x^2 - a}{x^2} \right| = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2 - a}{x^2} \right) \leq \frac{1}{2}, \text{ deci, conform teoremei 3, rezultă că șirul}$$

$(x_n)_{n \geq 0}$ este convergent la soluția ecuației $f(x) = x$, $x \in [\sqrt{a}, \infty) \Rightarrow x = \sqrt{a}$, deci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{a}.$$

Exemplul 8. Să se arate că șirul $(x_n)_{n \geq 0}$, definit prin $x_{n+1} = \frac{1}{p} [(p-1)x_n + a \cdot (x_n)^{1-p}]$, $\forall n \geq 0$, $x_0 > 0$, $a \geq 0$, $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$, este convergent și $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt[p]{a}$.

Soluție. Aplicând Bernoulli se observă că $x_n \geq \sqrt[p]{a}$. Fie funcția

$$f: [\sqrt[p]{a}, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{p} \left[(p-1)x + \frac{a}{x^{p-1}} \right],$$

$$f'(x) = \frac{p-1}{p} < \left(1 - \frac{a}{x^p}\right) < \frac{p-1}{p} < 1, \forall x \geq \sqrt[p]{a}.$$

Conform teoremei 3, rezultă că șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este convergent la soluția ecuației $f(x) = x$, $x \geq \sqrt[p]{a}$ și se observă că singura soluție este $\sqrt[p]{a}$, deci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt[p]{a}$.

Exemplul 9. Să se arate că șirul $(x_n)_{n \geq 0}$, definit prin $x_{n+1} = \frac{1}{b} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$,

$n \geq 0$, $x_0 > 0$, $a > 0$, $b > 1$, este convergent și $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{\frac{a}{b-1}}$.

Soluție. Prin inducție $x_n \geq \sqrt{a}$. Fie funcția $f: [\sqrt{a}, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{b} \left(x + \frac{a}{x} \right)$,

$f'(x) = \frac{1}{b} \left(1 - \frac{a}{x^2} \right) \leq \frac{1}{b} < 1$. Conform teoremei 3 rezultă că șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este

convergent la soluția ecuației $f(x) = x$, $x = \sqrt{\frac{a}{b-1}}$, deci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{\frac{a}{b-1}}$.

Atragem atenția asupra importanței precedentelor trei exemple. Primele două, evidențiate încă de Heron, furnizează o excelentă metodă de aproximare recursivă pentru $\sqrt{a}$, respectiv $\sqrt[p]{a}$ (cu $p \geq 2$). Pentru valori mari ale lui b exemplul 9 furnizează o metodă mai rapidă decât cea din exemplul 7 pentru a evalua valoarea unui radical.

Următorul exemplu va fi rezolvat succesiv prin mai multe metode.

Exemplul 10. Să se arate că șirul $(x_n)_{n \geq 0}$, definit prin relația $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}$, $n \geq 0$, $x_0 = \sqrt{2}$, este convergent și să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Soluție. Metoda 1. Notăm $x_0 = \sqrt{2} = 2 \cos \frac{\pi}{4}$ și se obține $x_1 = \sqrt{2+\sqrt{2}} = \sqrt{2+2 \cos \frac{\pi}{4}} = \sqrt{4 \cos^2 \frac{\pi}{8}} = 2 \cos \frac{\pi}{8}$, relație ce sugerează că $x_n = 2 \cos \frac{\pi}{2^{n+2}}$,

propoziție ce se demonstrează ușor prin inducție.

Metoda 2. Prin inducție matematică arătăm că $x_n \in [\sqrt{2}, 2]$.

Șirul de implicații $x_{k+1} > x_k \Rightarrow 2 + x_{k+1} > 2 + x_k \Rightarrow \sqrt{2+x_{k+1}} > \sqrt{2+x_k} \Rightarrow x_{k+2} > x_{k+1}$ constituie partea centrală a demonstrației prin inducție a crescătoarei monotonii a șirului. Deci, conform teoremei lui Weierstrass, șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este convergent și $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n = l$ și trecând la limită în relația de

recurență se obține $l = \sqrt{2+l} \Rightarrow l^2 - l - 2 = 0 \begin{cases} l_1 = 2 \\ l_2 = -1 \end{cases}$. Dar $\sqrt{2} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq 2$,

deci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2 = \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n$.

Metoda 3. Se demonstrează prin inducție că $x_n \in [\sqrt{2}, 2]$.

Fie funcția $f: [\sqrt{2}, 2] \rightarrow [\sqrt{2}, 2]$, $f(x) = \sqrt{2+x}$. Se observă că funcția este continuă și strict crescătoare pe $[\sqrt{2}, 2]$, deci conform teoremei 1 șirul $x_{n+1} = f(x_n)_{n \geq 0}$ asociat funcției f este convergent la soluția din $[\sqrt{2}, 2]$ a ecuației $f(x) = x \Leftrightarrow \sqrt{2+x} = x \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Metoda 4. Se demonstrează prin inducție că $x_n \in [\sqrt{2}, 2]$.

Funcția $f: [\sqrt{2}, 2] \rightarrow [\sqrt{2}, 2]$, $f(x) = \sqrt{2+x}$ este o contracție deoarece

$$\forall x, y \in [\sqrt{2}, 2] \quad |f(x) - f(y)| = |\sqrt{2+x} - \sqrt{2+y}| = \left| \frac{2+x-2-y}{\sqrt{2+x} + \sqrt{2+y}} \right| = \frac{|x-y|}{\sqrt{2+x} + \sqrt{2+y}} < \frac{1}{2\sqrt{2}} |x-y|$$

deoarece avem evident $\sqrt{2} < \sqrt{2+x}$, $\sqrt{2} < \sqrt{2+y}$ deci $2\sqrt{2} \leq \sqrt{2+x} + \sqrt{2+y}$, deci funcția f este o contracție; conform teoremei 2 șirul asociat funcției f , $(x_n)_{n \geq 0}$, și $x_0 = \sqrt{2}$ este convergent la soluția ecuației $f(x) = x$, $x \in [\sqrt{2}, 2]$; $x = 2$ deci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$.

Metoda 5. $x_n \in [\sqrt{2}, 2]$ prin inducție. Funcția $f: [\sqrt{2}, 2] \rightarrow [\sqrt{2}, 2]$

$f(x) = \sqrt{2+x}$ este derivabilă, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2+x}}$ și

$|f'(x)| \leq \frac{1}{4\sqrt{2}} < 1, \forall x \in [\sqrt{2}, 2]$. Conform teoremei 3 șirul x_n definit de funcția

f este convergent la soluția ecuației $f(x) = x$, $x \in [\sqrt{2}, 2]$. Deci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$.

Observație. Deoarece T 1 - 3 nu sunt în general cunoscute, convergența șirului $(x_n)_{n \geq 0}$ definit de o funcție $f: A \rightarrow A$ se demonstrează de obicei aplicând teorema lui Weierstrass de convergență a șirurilor monotone și mărginite, adică, se arată că șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este monoton și mărginit. Dacă șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este monoton crescător și mărginit superior, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n$. Dacă șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este monoton descrescător și mărginit inferior, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} x_n$.

În următoarele exemple vom arăta că sunt îndeplinite condițiile din criteriul lui Weierstrass de convergență a șirurilor monotone și mărginite.

Exemplul 11. (Formula lui Heron). Fie șirul $(x_n)_{n \geq 0}$, un șir definit prin

$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$, $n \geq 0$, $a > 0$, $x_0 > 0$. a) Să se studieze monotonia șirului

$(x_n)_{n \geq 0}$. b) Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{a}$ și să se determine $\sup_{n \in \mathbb{N}} x_n$, $\inf_{n \in \mathbb{N}} x_n$. c) Să se

calculeze x_n în funcție de x_0 și a .

Soluție. a) Se arată că $x_n \geq \sqrt{a}$, $\forall n \geq 1$. Se observă că $x_n > 0$, $\forall n \geq 0$.

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right) \geq \sqrt{x_n \cdot \frac{a}{x_n}} = \sqrt{a}, \quad \forall n \geq 0. \text{ S-a aplicat inegalitatea mediilor,}$$

deci $x_n \geq \sqrt{a}$, $\forall n \geq 1$. $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{a - x_n^2}{x_n} \leq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, deci șirul $(x_n)_{n \geq 1}$

este descrescător și mărginit inferior de $\sqrt{a}$. b) Conform teoremei lui Weierstrass șirul (x_n) este convergent. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$ se obține trecând la limită în

relația de recurență: $l = \frac{1}{2} \left(l + \frac{a}{l} \right) \Leftrightarrow 2l^2 = l^2 + a \Rightarrow l^2 = a \Rightarrow l = \sqrt{a}$. c) Se

observă că $\frac{x_{n+1} - \sqrt{a}}{x_{n+1} + \sqrt{a}} = \left(\frac{x_n - \sqrt{a}}{x_n + \sqrt{a}} \right)^2 = \left(\frac{x_0 - \sqrt{a}}{x_0 + \sqrt{a}} \right)^{2^n}$, din unde

$$x_{n+1} = \sqrt{a} \frac{(x_0 - \sqrt{a})^{2^n} + (x_0 + \sqrt{a})^{2^n}}{(x_0 - \sqrt{a})^{2^n} - (x_0 + \sqrt{a})^{2^n}} \rightarrow \sqrt{a}.$$

Exemplul 12. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ definit prin $x_{n+1} = (\sqrt{2})^{x_n}$, $\forall n \geq 0$, $x_0 = \sqrt{2}$ (șirul lui Euler). a) Să se studieze monotonia șirului. b) $x_n < 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

c) Să se calculeze $\sup x_n$, $\inf x_n$.

Soluție. a) Se demonstrează prin inducție că șirul este monotonic crescător.

$x_1 = \sqrt{2}^{\sqrt{2}} > \sqrt{2}^1 = x_0$ și $x_{k+1} > x_k \Rightarrow \sqrt{2}^{x_{k+1}} > \sqrt{2}^{x_k} \Rightarrow x_{k+2} > x_{k+1}$. b) Din nou

inducție completă $\sqrt{2} < 2$ și $x_k < 2 \Rightarrow x_{k+1} = \sqrt{2}^{x_k} < (\sqrt{2})^2 = 2$. c) Conform teoremei lui Weierstrass șirul x_n monotonic crescător și mărginit superior converge

la $\sup_{n \in \mathbb{N}} x_n = l$; din $x_{n+1} = (\sqrt{2})^{x_n}$, rezultă $l = \sqrt{2}^l$, deci $l = 2$. Mai constatăm

$\inf_{n \in \mathbb{N}} x_n = x_0 = \sqrt{2}$. Apreciem că nu sunt dificultăți majore în aplicarea acestei tehnici a șirurilor monotone și mărginite și în exemplul 8.

c) Probleme propuse

1. Fie $x_0 > 0$, $p, q \in (0, +\infty)$ și $x_{n+1} = \sqrt{px_n + q}$, $\forall n \geq 0$.

a) Să se arate că șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este monotonic și mărginit.

b) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

2. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ definit prin relația $x_{n+1} = \frac{x_n^2 + x_n}{1 + x_n^2}$, $n \geq 0$ și $x_0 \in [0, 1]$.

Să se arate că șirul este convergent și să se calculeze limita sa.

3. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 0}$, $x_0 = \frac{a}{2}$ unde $a \in [0, 1]$ și $x_{n+1} = \frac{1}{2}(a + x_n^2)$, $\forall n \geq 0$.

Să se arate că șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este convergent și se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

4. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ definit prin relația $x_{n+1} = x_n^2 - 3x_n + 4$, $\forall n \geq 0$ și $x_0 = a \in \mathbb{R}$. Să se studieze convergența șirului $(x_n)_{n \geq 0}$ și să se determine $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ în funcție de

a . (O.M., etapa locală Timișoara 1990)

5. Pentru $a \in [0, 1]$ fie șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ cu $x_1 = \frac{a}{2}$ și $x_{n+1} = \frac{1}{2}(a - x_n^2)$, $\forall n \geq 0$.

Să se arate că șirul este convergent și să se precizeze limita.

6. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ definit prin $x_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + x_n)}$, $n \geq 0$ și $x_0 \in [-1, 1]$.

a) Să se determine x_n în funcție de n și x_0 .

b) Să se arate că șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este convergent și să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

7. Să se studieze natura șirului $(x_n)_{n \geq 0}$, $x_0 > 0$ și $x_{n+1} = \ln(1 + x_n)$, $\forall n \geq 0$.

8. Să se arate că șirul $(x_n)_{n \geq 0}$, $x_0 = a > 1$ definit prin $x_{n+1} = e^{-1+x_n}$ este monotonic crescător și să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. (Examen admitere 1983)

9. Fie $a, b \in (0, +\infty)$ și șirurile $(a_n)_{n \geq 0}$, $(b_n)_{n \geq 0}$ definite prin $a_0 = a$,

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{1}{b_n} \right), b_0 = b, b_{n+1} = \frac{1}{2} \left(b_n + \frac{1}{a_n} \right), \quad \forall n \geq 0.$$

Să se arate că șirurile sunt convergente și să se calculeze limitele lor.

10. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ și $a > 0$, $x_0 > 0$ și $x_{n+1} = \frac{x_n(x_n^2 + 3a)}{3x_n^2 + a}$, $n \geq 0$.

Să se demonstreze că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{a}$.

11. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 0}$, $x_0 > 0$, $a > 0$ și $x_{n+1} = \frac{x_n(x_n^3 + 2a)}{2x_n^3 + a}$, $n \geq 0$.

Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt[3]{a}$.

12. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ definit prin $x_{n+1} = x_n^3 - 3x_n$, $\forall n \geq 0$.

a) Să se arate că dacă $x_0 \in [-2, 2]$, atunci $x_n \in [-2, 2]$, $\forall n \geq 0$.

b) Aflați x_n în funcție de x_0 .

13. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ un șir de numere reale care satisfac relația de recurență

$$x_{n+1} = x_n - x_n^2 + x_n^3 - x_n^4, \quad \forall n \geq 0.$$

Dacă $x_0 \in (0, 1)$ să se arate că șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este convergent și să se calculeze limita. (O.M., etapa județ, Iași, 1983)

§8. Șiruri omografice

a) Aspecte teoretice

Definiție. Fiind date numerele reale a, b, c, d, x_0 , șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ ce satisface relația de recurență (1) $x_{n+1} = \frac{ax_n + b}{cx_n + d}$ se numește *șir omografic* iar

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ se numește *matricea asociată* lui.

Observația 1. În cazul când matricea A este degenerată, adică are loc

(2) $\det A = ad - bc = 0$, se constată că șirul constant $x_n = x_0, \forall n \in \mathbb{N}$ este șir omografic.

Observația 2. Dacă are loc $c = 0$, șirul omografic este un șir recurent liniar de ordin I cu coeficienți constanți.

Observația 3. Strict vorbind pentru ca (1) să definească realmente un șir $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ este necesar să aibă loc (3) $\forall n \in \mathbb{N}, cx_n + d \neq 0$. Este aici inclusă condiția uzual verificată (3₀) $cx_0 + d \neq 0$ dar se omite excluderea situației când (3) este contrazisă de exemplul pentru $n = 1$, anume (3₁) $c(a+d)x_0 + bc + d^2 \neq 0$. Această imprecizie și aparentă neglijență provine din faptul că valorile termenilor șirurilor omografice trebuie considerate nu în $\mathbb{R}$ ci în $\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Astfel,

neîndeplinirea lui (3) pentru $n \in \mathbb{N}$ ar implica $x_{n+1} = \infty, x_{n+2} = \frac{a}{2}, x_{n+3} = \frac{a^2 + bc}{a^2 + cd}$,

etc. În cele ce urmează vom prezenta câteva metode de determinare a termenului general a unui șir omografic și metode de studiu a convergenței acestor șiruri. Aparent auxiliară, cea de a doua problemă este strâns legată de cea a determinării. Presupunând că $(x_n)_{n \geq 0}$ este convergent, $c \neq 0$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = r \in \mathbb{R}$,

trecând la limită în (1) se obține ecuația (4) $cr^2 + (d-a)r - b = 0$ numită *ecuația caracteristică a șirului omografic* (1). Vom nota cu D discriminantul acestei ecuații, (5) $D = (d-a)^2 + 4bc$. Ipoteza convergenței impune $D \geq 0$ și se disting două cazuri.

1) $D > 0$, atunci ecuația (2) are două rădăcini reale și distincte $r_1, r_2, r_1 \neq r_2$ și dacă șirul omografic este convergent atunci el converge la r_1 sau la r_2 .

2) $D = 0$, atunci ecuația (2) are rădăcini reale și egale $r_1 = r_2$ și dacă șirul (1) este convergent atunci el converge la r_1 .

Observația 4. Dacă $D < 0$, ecuația (2) nu are rădăcini reale și atunci știm sigur că șirul (1) nu este convergent.

Deci când avem dat un șir omografic cu $c \neq 0$ calculăm D pentru ecuația caracteristică asociată și dacă $D < 0$ atunci șirul nu este convergent, iar dacă $D \geq 0$ vom studia convergența șirului folosind o metodă convenabilă.

Metoda 1. În care se aplică criteriul lui Weierstrass de convergență a șirurilor monotone și mărginite. Spre exemplificare considerăm următorul exercițiu.

E₁. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 0}$, definit prin relația $x_{n+1} = \frac{2}{1+x_n}, \forall n \in \mathbb{N}, x_0 > 1$.

Să se arate că șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este convergent și să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Soluție. Prin inducție matematică se demonstrează propoziția

$P(n): x_1 < x_3 < \dots < x_{2n+1} < 1 < x_{2n} < \dots < x_4 < x_2 < x_0$ din care rezultă conform teoremei lui Weierstrass că subșirurile (x_{2n+1}) și (x_{2n}) sunt convergente. Dacă notăm $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = a$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = b$ atunci $a \leq 1 \leq b$ și

arătăm că $a = b = 1$. Cum $x_{2n+1} = \frac{2}{1+x_{2n}}, \forall n \in \mathbb{N}$ și $x_{2n+2} = \frac{2}{1+x_{2n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}$,

trecând la limită în aceste relații de recurență se obține: $a = \frac{2}{1+b}$ și $b = \frac{2}{1+a}$ de

unde rezultă imediat $a = b = 1$.

Observația 5. Șirului (1) i se poate asocia o funcție $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$. Dacă funcția f este crescătoare pe D atunci se arată că șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este monoton și mărginit, deci este convergent. (Dacă $x_1 \leq x_0$ șirul este descrescător, iar dacă $x_1 \geq x_0$ șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este crescător). Dacă funcția f este descrescătoare pe D , atunci șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ are subșirurile $(x_{2n}), (x_{2n+1})$ monotone dar de monotonii diferite (vezi E₁ de mai sus).

Metoda 2. În cazul în care discriminantul D al ecuației caracteristice (4) este strict mai mare ca zero, șirul omografic neconstant $(x_n)_{n \geq 0}$ se reduce prin

(6) $y_n = \frac{x_n - r_1}{x_n - r_2}$ la o progresie geometrică, $r_1 \neq r_2$ fiind rădăcinile reale ale

ecuației (4). Într-adevăr, dacă $r_i (i = 1, 2)$ sunt rădăcinile ecuației (4) au loc egalitățile $b - r_i d = r_i(c - ar_i)$ și constatăm

$$y_{n+1} = \frac{x_{n+1} - r_1}{x_{n+1} - r_2} = \frac{(ax_n + b) - r_1(cx_n + d)}{(ax_n + b) - r_2(cx_n + d)} = \frac{(a - r_1c)x_n + (b - r_1d)}{(a - r_2c)x_n + (b - r_2d)} = \frac{(a - r_1c)(x_n - r_1)}{(a - r_2c)(x_n - r_2)} = \lambda \cdot y_n \text{ unde s-a notat}$$

$$\lambda = \frac{a - r_1c}{a - r_2c} = \frac{2a - (a - d - \sqrt{D})}{2a - (a - d + \sqrt{D})} = \frac{a + d + \sqrt{D}}{a + d - \sqrt{D}} = \frac{(a + d + \sqrt{D})^2}{(a + d)^2 - D} = \frac{(a + d)^2 + (a - d)^2 + 4bc - 2(a + d)\sqrt{D}}{4(ad - bc)} = \frac{a^2 + d^2 + 2bc - (a + d)\sqrt{D}}{2(ad - bc)}$$

Deci am dedus (7) $y_{n+1} = \lambda \cdot y_n$, pentru

$$(8) \lambda = \frac{a - r_1c}{a - r_2c} = \frac{a^2 + d^2 + 2bc - (a + d)\sqrt{D}}{2(ad - bc)}. \text{ Din (7) rezultă (9) } y_n = \lambda^n y_0 \text{ și}$$

urmează (10) $x_n = [r_1 - \lambda^n r_2] : (1 - \lambda^n)$.

Observația 6. Metoda este aplicabilă cu excepția cazului când $x_0 \in \{r_1, r_2\}$.

Vom aplica această a doua metodă pentru șirul omografic dat de E_1 .

Ecuția caracteristică este $r^2 + r - 2 = 0$, din care rezultă $r_1 = 1$, $r_2 = -2$. Notând cu $y_n = \frac{x_n - 1}{x_n + 2}$, se obține: $y_{n+1} = -\frac{1}{2}y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ unde $y_0 = \frac{x_0 - 1}{x_0 + 2} > 0$. Am

obținut o progresie geometrică cu rația $-\frac{1}{2}$, deci $y_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n y_0$ și se observă că $y_n \rightarrow 0$, rația fiind subunitară în modul.

Metoda 3. Orice șir omografic poate fi redus la un șir liniar de ordinul doi cu coeficienți reali, constanți, prin substituția (11) $x_n = \frac{y_{n+1}}{y_n} - \frac{d}{c}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Se obține atunci $\frac{y_{n+2}}{y_{n+1}} - \frac{d}{c} = \frac{a(cy_{n+1} - dy_n) + by_n}{c(cy_{n+1} - dy_n) + cy_n}$ sau

$$c(cy_{n+2} - dy_{n+1}) = acy_{n+1} - (ad - bc)y_n, \text{ adică}$$

$$(12) \quad c^2 y_{n+2} - c(a + d)y_{n+1} + (ad - bc)y_n = 0.$$

Să exemplificăm cu același șir dat la E_1 : $x_{n+1} = \frac{2}{1 + x_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_0 > 1$ dat.

Prin substituția $x_n = \frac{y_{n+1}}{y_n} - 1$, se obține $y_{n+2} - y_{n+1} - 2y_n = 0$. Ecuția caracteristică asociată relației de recurență este $r^2 - r - 2 = 0$, care are rădăcinile $r_1 = -1$, $r_2 = 2$, deci $y_n = c_1 \cdot (-1)^n + c_2 \cdot 2^n$. Ținând seama de condițiile inițiale se obțin: $c_1 = \frac{2y_0 - y_1}{3}$ și $c_2 = \frac{y_0 + y_1}{3}$, deci $y_n = \frac{2y_0 - y_1}{3} \cdot (-1)^n + \frac{y_0 + y_1}{3} \cdot 2^n$.

De aici nu există dificultăți de a explicita x_n din (11) dar răspunsul la întrebarea din E_1 se obține trecând direct la limită în (11):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{y_{n+1}}{y_n} - 1 \right) = 2 - 1 = 1.$$

Metoda 4 constă în explicitarea termenilor a_n , b_n , c_n , d_n pentru $n \in \mathbb{N}$, încât

$$(13) \quad x_n = \frac{a_n x_0 + b_n}{c_n x_0 + d_n}. \text{ Pentru } n = 0, 1 \text{ putem lua}$$

$$(14) \quad a_0 = 1, b_0 = 0, c_0 = 0, d_0 = 1; a_1 = a, b_1 = b, c_1 = c, d_1 = d.$$

Acceptând (13) pentru $n = k$ va urma $x_{k+1} = \frac{ax_k + b}{cx_k + d} =$

$$= \frac{a(a_k x_0 + b_k) + b(c_k x_0 + d_k)}{c(a_k x_0 + b_k) + d(c_k x_0 + d_k)} = \frac{(a \cdot a_k + b \cdot c_k)x_0 + (a \cdot b_k + b \cdot d_k)}{(c \cdot a_k + d \cdot c_k)x_0 + (c \cdot b_k + d \cdot d_k)} \text{ deci}$$

$$(15) \quad \begin{cases} a_{k+1} = a \cdot a_k + b \cdot c_k \\ c_{k+1} = c \cdot a_k + d \cdot c_k \end{cases} \quad \begin{cases} b_{k+1} = a \cdot b_k + b \cdot d_k \\ d_{k+1} = c \cdot b_k + d \cdot d_k \end{cases}$$

Prin această scriere au fost puse în evidență sisteme de câte două recurențe

liniare: unul pentru (a_k, c_k) , celălalt pentru (b_k, d_k) . Particularizând metoda

pentru E_1 obținem pentru început $\begin{cases} a_{n+1} = 2c_n & a_0 = 1, a_1 = 0 \\ c_{n+1} = a_n + c_n & c_0 = 0, c_1 = 1 \end{cases}$ cu

Eliminând (c_n) găsim recurența liniară de ordin doi: $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$. Ecuția caracteristică, $r^2 - r - 2 = 0$, furnizează $r_1 = -1$, $r_2 = 2$, deci:

$$a_n = t_1 (-1)^n + t_2 \cdot 2^n = \frac{1}{3} [2 \cdot (-1)^n + 2^n] \text{ și}$$

$$(16) \quad c_n = \frac{1}{2} a_{n+1} = \frac{1}{3} [(-1)^{n+1} + 2^n].$$

Avem în continuare $\begin{cases} b_{n+1} = 2d_n & b_0 = 0, b_1 = 2 \\ d_{n+1} = b_n + d_n & d_0 = 1, d_1 = 1 \end{cases}$ cu

$$b_n = s_1 (-1)^n + s_2 \cdot 2^n = \frac{2}{3} [(-1)^{n+1} + 2^n],$$

$$(17) \quad d_n = \frac{1}{2} b_{n+1} = \frac{1}{3} [(-1)^n + 2^{n+1}].$$

Vom avea deci următoarea explicitare în funcție de x_0 a termenului general

din $(x_n)_{n \geq 0}$ (18) $x_n = \frac{[2 \cdot (-1)^n + 2^n]x_0 + [(-1)^n + 2^{n+1}]}{[(-1)^{n+1} + 2^n]x_0 + [(-1)^n + 2^{n+1}]}$. Se mai constată independența de x_0 a limitelor acestei familii de șiruri omografice

$$(19) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n(x_0 + 2)}{2^n(x_0 + 2)} = 1.$$

Observația 7. Metoda 4 aici expusă oferă și detalii la chestiunea sugerată de observația 3: Care sunt valorile ce nu le poate lua x_0 dacă se dorește ca toți termenii șirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ să fie numere reale? Valorile excluse vor fi în cazul

$$\text{problemei } E_1: -\frac{d_n}{c_n} = -\frac{2^{n+1} + (-1)^n}{2^n + (-1)^n}.$$

Metoda 5. Șirului omografic $(x_n)_{n \geq 0}$ dat prin: $x_{n+1} = \frac{ax_n + b}{cx_n + d}$

$x_0, a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ i se asociază matricea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ care

$$\text{corespunde lui } x_1 = \frac{ax_0 + b}{cx_0 + d}. \text{ Cum } x_2 = \frac{ax_1 + b}{cx_1 + d} = \frac{a \cdot \frac{ax_0 + b}{cx_0 + d} + b}{c \cdot \frac{ax_0 + b}{cx_0 + d} + d} =$$

$$= \frac{(a^2 + bc)x_0 + b(a + d)}{c(a + d)x_0 + bc + d^2} \text{ și } A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a + d) \\ c(a + d) & bc + d^2 \end{pmatrix}, \text{ înseamnă că lui } x_2 \text{ îi}$$

corespunde A^2 .

Am văzut că x_n se poate scrie $x_n = \frac{a_n x_0 + b_n}{c_n x_0 + d_n}$ și inductiv se arată că lui x_n îi corespunde matricea $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$. Deci pentru a calcula pe x_n în funcție de x_0 este suficient să calculăm pe A^n . În cazul șirului $(x_n)_{n \geq 0}$ dat la E_1 :

$$x_{n+1} = \frac{2}{1+x_n}, n \geq 0, x_0 > 1; \text{ cum șirului } (x_n) \text{ îi corespunde matricea } A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

să determinăm pe A^n . Ecuația caracteristică corespunzătoare matricei A este:

$$A^2 - (\text{Tr } A) \cdot A + \det A \cdot I_2 = O_2 \text{ cu } \text{Tr } A = 1 \text{ și } \det A = -2 \text{ deci } A^2 = A + 2I_2.$$

Deoarece $A^n = \alpha_n A + \beta_n I_2$, $A^{n+1} = \alpha_{n+1} A + \beta_{n+1} I_2$, dar $A^{n+1} = A^n \cdot A = (\alpha_n A + \beta_n I_2) \cdot A = \alpha_n A^2 + \beta_n A = \alpha_n (A + 2I_2) + \beta_n A = (\alpha_n + \beta_n)A + 2\alpha_n I_2$, deci $\alpha_{n+1} = \alpha_n + \beta_n$, $\beta_{n+1} = 2\alpha_n$, de unde rezultă $\beta_{n+2} = \beta_{n+1} + 2\beta_n$. Ecuația caracteristică asociată este $r^2 = r + 2$ care are rădăcinile $r_1 = -1$, $r_2 = 2$, deci $\beta_n = t_1 \cdot (-1)^n + t_2 \cdot 2^n$, unde $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 2$. Avem deci

$$\beta_n = \frac{1}{3}[2 \cdot (-1)^n + 2^n], \alpha_n = \frac{1}{3}[(-1)^{n+1} + 2^n], A^n = \begin{pmatrix} \beta_n & 2\alpha_n \\ \alpha_n & \alpha_n + \beta_n \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \cdot (-1)^n + 2^n & 2 \cdot (-1)^{n+1} + 2^{n+1} \\ (-1)^{n+1} + 2^n & (-1)^n + 2^{n+1} \end{pmatrix}$$

și regăsim (18), (19).

Prezentăm în continuare o generalizare a șirurilor omografice (vezi Viorel Sadoveanu în [17] vol. 9 p. 159).

Pentru $\lambda, A, B \in \mathbb{R}^*$ și $u_0 \in \mathbb{R}$ se consideră relația de recurență

$$(20) \quad \mu_{n+1} = \frac{B \cdot (Au_n + B)^\lambda + (Au_n - B)^\lambda}{A \cdot (Au_n + B)^\lambda - (Au_n - B)^\lambda}. \text{ Se caută o soluție de forma}$$

$$u_n = \frac{x_n}{y_n} \text{ impunând (21) } \begin{cases} A \cdot x_{n+1} = (Ax_n + By_n)^\lambda + (Ax_n - By_n)^\lambda, \\ B \cdot y_{n+1} = (Ax_n + By_n)^\lambda - (Ax_n - By_n)^\lambda. \end{cases}$$

$$\text{Se deduce: } \begin{cases} Ax_{n+1} + By_{n+1} = 2 \cdot (Ax_n + By_n)^\lambda, \\ Ax_{n+1} - By_{n+1} = 2 \cdot (Ax_n - By_n)^\lambda \end{cases}$$

$$\text{și urmează (22) } \begin{cases} Ax_n + By_n = 2^{f(n)} \cdot (Ax_0 + By_0)^{\lambda^n}, \\ Ax_n - By_n = 2^{f(n)} \cdot (Ax_0 - By_0)^{\lambda^n} \end{cases}$$

$$\text{unde } f(n) = 1 + \lambda + \dots + \lambda^{n-1} = \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1} \text{ și putem lua } x_0 = u_0, y_0 = 1. \text{ Explicitarea lui}$$

$$x_n, y_n \text{ din (22) conduce la soluția } u_n = \frac{x_n}{y_n} \text{ a problemei.}$$

b) Probleme propuse

$$1. \text{ Fie șirul } (x_n)_{n \geq 0} \text{ definit prin: } x_0 = a > 0, x_{n+1} = \frac{4}{3+x_n}, \forall n \geq 0.$$

Să se determine x_n și să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$.

$$2. \text{ Pentru } a > 0 \text{ și } x_0 > 0 \text{ fie șirul } (x_n)_{n \geq 0} \text{ definit prin } x_{n+1} = \frac{2ax_n}{a+x_n}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Să se studieze convergența șirului $(x_n)_{n \geq 0}$ și să se determine $\inf_{n \in \mathbb{N}} x_n, \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n$.

Examen de admitere 1985

$$3. \text{ Fie șirul } (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, x_0 = a > 1, x_{n+1} = \frac{a(x_n + 1)}{a + x_n}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

a) Să se studieze convergența șirului (x_n) .

b) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, să se determine $\sup_{n \in \mathbb{N}} x_n, \inf_{n \in \mathbb{N}} x_n$.

$$4. \text{ Fie șirul } (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, x_0 = 1, x_{n+1} = \frac{2x_n - 1}{2x_n - 5}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Să se studieze convergența șirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Bacalaureat Franța 1975

$$5. \text{ Fie șirul } (x_n)_{n \geq 0} \text{ definit în felul următor: } x_{n+1} = \frac{x_n - 5}{x^n - 1}, x_0 > 1. \text{ Să se arate}$$

că $x_{n+2} = x_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Este șirul (x_n) mărginit? Să se studieze convergența șirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

$$6. \text{ Fie șirul } (x_n)_{n \geq 0} \text{ definit prin: } x_0 > 0, x_{n+1} = \frac{5x_n + 3}{x_n + 3}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Să se studieze convergența.

7. Fie șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dat prin: $x_{n+1}x_n + x_{n+1} = x_n - 1, \forall n \in \mathbb{N}, x_0 \notin \{-1, 0, 1\}$. Să se studieze dacă șirul are limită sau nu. Dacă $x_{1994} = 40$, să se afle șirul $(x_n)_{n \geq 0}$.

$$8. \text{ Să se demonstreze că șirul } (x_n)_{n \geq 0} \text{ definit prin } x_{n+1} = \frac{2}{2-x_n}, \forall n \in \mathbb{N}, x_n \neq 2,$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, este periodic.

$$9. \text{ Fie șirul } (x_n)_{n \geq 0} \text{ definit prin } x_0 = 1979, x_{n+1} = \frac{1979(1+x_n)}{1979+x_n}, n \in \mathbb{N}.$$

Să se studieze convergența șirului $(x_n)_{n \geq 0}$ și în caz de convergență să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Olimpiadă Austria 1979

$$10. \text{ Fie șirul } (x_n)_{n \geq 0} \text{ definit prin } x_0 = a > 0, x_{n+1} = \frac{4x_n - 1}{2x_n + 1}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Să se găsească expresia termenului general x_n și să se determine $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Revista Timișoara 1991

11. Fie $x_0 > 0$, $a > 0$ date și $x_{n+1} = \frac{a}{1+x_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Să se arate că șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge către rădăcina pozitivă a ecuației $r^2 + r - a = 0$.

12. Dacă pentru $x_0 < 0$, $a > 0$ șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este dat prin $x_{n+1} = \frac{a}{x_n} - 1$, atunci șirul converge la rădăcina negativă a ecuației $r^2 + r - a = 0$.

13. Se consideră șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dat prin: $x_{n+1} = \frac{3x_n}{1-2x_n}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, $x_0 \neq \frac{1}{2}$.

a) Să se arate că dacă $x_0 = 0$ atunci $x_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

b) Fie șirul $y_n = \frac{x_n + 1}{x_n}$. Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

14. Fie șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$: $x_{n+1} = 1 + \frac{2}{x_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_0 = a \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Dacă $y_n = \frac{x_n - 2}{x_n + 1}$ să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

15. Fie șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definit prin: $x_{n+1} = \frac{x_n + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}x_n}$, $\forall n \geq 0$, $x_1 = a \in \mathbb{R}$ fixat.

Să se demonstreze că $(x_n)_{n \geq 1}$ este periodic și să i se calculeze perioada.

16. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ dat prin $x_{n+1} = \frac{ax_n - (a^2 + b^2)}{x_n - a}$ și considerând $x_n = a + b \operatorname{tg} \theta_n$ să se arate că $x_{n+2} = x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

17. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$: $x_{n+1} = \frac{x_n + \sqrt{2} - 1}{1 - x_n(\sqrt{2} - 1)}$. Să se arate că șirul este periodic. Care

este perioada?

18. Se consideră șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ definit prin relația de recurență

$$x_{n+1} = 1 - \frac{1}{x_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, x_n \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}.$$

a) Exprimați x_{n+2} și x_{n+3} în funcție de x_n și determinați forma termenului general.

b) Să se arate că șirul este mărginit, dar nu convergent.

Examen de admitere 1994

19. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 0}$, definit prin $x_{n+1} = \frac{x_n + 1}{2x_n - 1}$, $x_0 \neq \frac{1}{2}$, $\forall n \geq 0$.

Să se determine x_0 pentru care șirul este convergent.

20. Să se arate că șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ definit prin $x_{n+1} = \frac{ax_n + b}{cx_n - a}$, $\forall n \geq 0$, $x_0 \neq \frac{a}{c}$,

$a, b, c \in \mathbb{R}$ este periodic de perioadă doi.

21. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ cu proprietățile: $x_{n+1}x_n - \sqrt{3}x_{n+1} + 2 = x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. a) Să se studieze convergența șirurilor. b) Să se calculeze suma primilor 100 de termeni iraționali și șirului, dacă $x_{100} = 2$.

22. Dacă șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este definit prin $x_{n+1} = \frac{2+x_n}{1+x_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ și $x_0 = 1$ să se arate că $(x_n)_{n \geq 0}$ este convergent la $\sqrt{2}$.

23. Fie $a, b > 0$ și $a^2 > b$ și șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ definit prin relația $x_{n+1} = \frac{ax_n + b}{x_n + a}$, $\forall n \geq 0$, $x_0 > 0$. Să se arate că șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este convergent la $\sqrt{b}$.

24. a) Să se arate că $\forall n \in \mathbb{N}^*$ există o singură pereche de numere naturale a_n, b_n astfel încât $(3 + 2\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$, $\forall n \geq 1$. b) Notând cu $x_n = \frac{a_n}{b_n}$ să se arate că șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este monoton descrescător și $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{2}$.

25. Să se deducă termenul general al șirurilor $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ce satisfac condițiile

$$a) u_0 \neq 0 \text{ și } u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{a}{u_n} \right); \quad b) u_0 \neq 0 \text{ și } u_{n+1} = \frac{u_n^3 + 3u_n}{3u_n^2 + 1};$$

$$c) u_0 \geq 1 \text{ și } u_{n+1} = u_n + \sqrt{u_n^2 - 1}.$$

26. Să se arate că pentru orice numere reale a, b există o funcție continuă unică $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ încât $F(x+1) - 2 \cdot F(x) = a$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(0) = b$ și restricția lui F la $(0, 1)$ să fie funcție liniară. (D.B.)

27. Se consideră șirurile $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ce satisfac relația de recurență

$$x_{n+3} = x_{n+2} + x_{n+1} + x_n, \quad \forall x \in \mathbb{N}.$$

a) Să se arate că există $\alpha \in \mathbb{R}$, $1,34 < \alpha < 1,37$, $\theta \in (0, \pi)$ încât $2,1 < \theta < 2,2$ și $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ încât pentru orice $n \in \mathbb{N}$ să aibă loc $x_n = a \cdot \alpha^{2n} + \alpha^{-n}(b \cos n\theta + c \sin n\theta)$. b) Să se arate că pentru $(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{Q}^3$, șirul (x_n) converge dacă și numai dacă $x_0 = x_1 = x_2 = 0$. (D.B.)

§9. Recurențe cu inegalități

a) Probleme rezolvate

Dacă relația de recurență nu este o egalitate ci o inegalitate, nu se pune problema determinării termenului general a șirului recurent. Există însă situații frecvente când șirurile din familia ce satisface recurența dată au proprietăți de convergență comune ce pot fi demonstrate fără determinarea efectivă a șirurilor. În acest scop vom evidenția trei metode ce le vom exemplifica succesiv prin

exemple ce le vom nota i_k , inițiala i sugerând „inegalități”.

Metoda 1. Se arată îndeplinirea criteriului lui Weierstrass, deci existența limitei. Prin trecere la limită în inegalitatea de recurență se va determina limita.

i_1 . Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ un șir de numere strict pozitive cu proprietatea $x_{n+1} \leq \frac{x_n}{1+x_n}$,

$\forall n \geq 0, x_0 = 1$. a) Să se arate că șirul este convergent. b) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n, \inf_{n \in \mathbb{N}} x_n$.

Soluție. a) Împărțim în relația de recurență cu $x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ și se obține $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \frac{1}{1+x_n} < 1, \forall n \in \mathbb{N}$, deci șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este strict descrescător și mărginit inferior de zero; conform teoremei lui Weierstrass șirul (x_n) va fi convergent la $\inf_{n \in \mathbb{N}} x_n$. b) Notăm $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$, și trecând la limită în relația de recurență se obține $l^2 \leq 0$, dar $l^2 \geq 0$, deci $l = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} x_n = 0$, iar $\sup_{n \in \mathbb{N}} x_n = \max_{n \in \mathbb{N}} x_n = x_0 = 1$.

i_2 . Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ un șir de numere strict pozitive cu proprietatea $x_{n+1} \leq \frac{x_n^2}{1+x_n}$,

$\forall n \geq 0, x_0 = 1$. Să se arate că a) șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este convergent; b) să se determine $\inf_{n \in \mathbb{N}} x_n, \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n$.

Soluție. a) Din $x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ și împărțind în relația de recurență cu x_n se obține: $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \frac{x_n}{1+x_n} < 1$, deci șirul este strict descrescător și mărginit inferior de zero. Conform criteriului lui Weierstrass șirul este convergent la $\inf_{n \in \mathbb{N}} x_n = l$.

b) Trecând la limită în relația de recurență, se obține că $l \leq \frac{l^2}{1+l} \Rightarrow l + l^2 \leq l^2$ dar $x_n > 0$ implică $l \geq 0$, deci $l = 0$. Deci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 = \inf_{n \in \mathbb{N}} x_n, \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n = x_0 = 1$.

i_3 . Să se demonstreze că dacă un șir de numere reale $(a_n)_{n \geq 0}$ satisface inegalitatea dublă $a_n^2 - 2a_{n+1} \leq 4a_n - 9 < 2(3a_n - a_{n+1} - 1), \forall n \in \mathbb{N}$, atunci șirul este convergent și să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. (O.M. faza locală, 1982 București)

Soluție. $a_0 \in \mathbb{R}, a_1 > 0$.

1. Din $a_n^2 - 2a_{n+1} \leq 4a_n - 9 \Rightarrow (1) 2a_{n+1} \geq (a_n - 2)^2 + 5$, prin inducție se arată că $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Mai rezultă $2a_{n+1} - 2a_n \geq a_n^2 - 6a_n + 9 = (a_n - 3)^2 \geq 0$, deci $a_{n+1} \geq a_n, \forall n \in \mathbb{N}$, deci șirul $(a_n)_{n \geq 0}$ este crescător.

2. Din $a_n^2 - 2a_{n+1} \leq 6a_n - 2a_{n+1} - 2$ rezultă că $a_n^2 - 6a_n + 2 \leq 0$, deci $a_n \in \left[\frac{6 - \sqrt{28}}{2}, \frac{6 + \sqrt{28}}{2} \right], \forall n \in \mathbb{N}^*$, deci șirul este mărginit superior. Conform

criteriului lui Weierstrass șirul (a_n) converge la $\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n = l = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Trecând la limită în relația de recurență, se obține: $l^2 - 2l \leq 4l - 9 \Rightarrow l^2 - 6l + 9 \leq 0 \Leftrightarrow (l - 3)^2 \leq 0$, deci $l = 3$. Deci $\sup_{n \in \mathbb{N}} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$.

i_4 . Fie $a < b$, două numere reale. Se consideră șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ pentru care

1) $a < x_n < b, \forall n \in \mathbb{N}$; 2) $(b - x_n)(x_{n+1} - a) \geq \left(\frac{b - a}{2} \right)^2, \forall n \in \mathbb{N}$. Să se arate că

șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este convergent și să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \inf_{n \in \mathbb{N}} x_n, \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n$.

Soluție. Se observă că $x_{n+1} - a > 0, b - x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Aplicând inegalitatea

mediilor $\frac{b - x_n + x_{n+1} - a}{2} \geq \sqrt{(b - x_n)(x_{n+1} - a)} \geq \sqrt{\left(\frac{b - a}{2} \right)^2} = \frac{b - a}{2}$, deci

$x_{n+1} \geq x_n$, șirul este monoton crescător. Din 1) rezultă că șirul este mărginit, deci se poate aplica teorema lui Weierstrass. Fie $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n = l$. Trecând la limită

în relația 2) se obține: $(b - l)(l - a) \geq \frac{b^2 + a^2 - 2ab}{4} \Rightarrow [2l - (a + b)]^2 \leq 0$, deci

$l = \frac{a + b}{2}, \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{a + b}{2}, \inf_{n \in \mathbb{N}} x_n = x_0$.

i_5 . Fie șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ pentru care $\frac{1 + a_{n-1}}{2} \leq a_{2n} \leq \frac{1 + a_n}{2}, \forall n \geq 2$.

1) Să se arate că $(a_n)_{n \geq 1}$ este convergent și are limita 1.

2) Dați exemplu de un șir având proprietatea din enunț.

Soluție. 1) Din $\frac{1 + a_{n-1}}{2} \leq \frac{1 + a_n}{2}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ rezultă că $a_{n-1} \leq a_n, \forall n \in \mathbb{N}$,

$n \geq 2$, deci șirul este crescător. Din $a_n \leq a_{2n} \leq \frac{1 + a_n}{2}$ se obține $a_n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$,

$n \geq 1$. Conform teoremei lui Weierstrass rezultă că șirul (a_n) este convergent și $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$. Presupunem că $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$ și trecând la limită în relațiile date,

rezultă $\frac{1 + l}{2} \leq l \leq \frac{1 + l}{2} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$. 2) $a_n = 1 - \frac{1}{n}, \forall n \geq 1$ satisface inegalitățile din enunț.

i_6 . Fie șirul $(x_n)_{n \geq 0}$, un șir de numere strict pozitive cu proprietatea $x_{n+1}^2 \leq 2x_n - 1, \forall n \in \mathbb{N}, x_0 = a > 1$.

a) Să se arate că șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este convergent.

b) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. (O.M., etapa locală 1988, Iași)

Soluție. Scădem pe x_n^2 și se obține $x_{n+1}^2 - x_n^2 \leq -x_n^2 + 2x_n - 1 = -(x_n - 1)^2 \leq 0$, deci $(x_{n+1} - x_n)(x_{n+1} + x_n) \leq 0 \Rightarrow x_{n+1} \leq x_n$, deci șirul este monoton și mărginit inferior de zero; conform criteriului lui Weierstrass se obține că șirul este convergent.

Notăm $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$. Trecând la limită în relația de recurență se obține:
 $l^2 \leq 2l - 1 \Leftrightarrow (l - 1)^2 \leq 0$, deci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} x_n = 1$.

i₇. Să se arate că orice șir de numere reale $(a_n)_{n \geq 0}$ cu proprietatea

$$\frac{1}{8}(6a_n - a_{n-1}) \leq a_{n+1} \leq \frac{1}{6}(5a_n - a_{n-1}), \forall n \geq 1$$

este convergent cu limita zero. (O.M., etapa finală, București, 1990)

Soluție. Din ipoteză rezultă că $\frac{1}{8}(6a_n - a_{n-1}) \leq \frac{1}{6}(5a_n - a_{n-1}) \Leftrightarrow (1) \ 2a_n \geq a_{n-1}$,

$\forall n \geq 1$. Din $\frac{1}{8}(6a_n - a_{n-1}) \leq a_{n+1}$ se obține (2) $-\frac{1}{8}(2a_n + a_{n-1}) \leq a_{n+1} - a_n$.

Din $a_{n+1} \leq \frac{1}{6}(5a_n - a_{n-1})$ rezultă (3) $a_{n+1} - a_n \leq -\frac{1}{6}(a_n + a_{n-1})$, deci

$$(4) \ -\frac{1}{8}(2a_n + a_{n-1}) \leq a_{n+1} - a_n \leq -\frac{1}{6}(a_n + a_{n-1}), \forall n \geq 1.$$

Cazul 1. $\exists t \in \mathbb{N}$ astfel încât $a_t \geq 0$. Din (1) rezultă $2a_n \geq a_t \geq 0, \forall n \geq t$. Din (4) $a_{n+1} - a_n \leq -\frac{1}{6}(a_n + a_{n-1}), \forall n \geq t$, deci a_n monoton descrescător și mărginit inferior de zero, deci există $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$. Din relația de recurență $\Rightarrow l = 0$.

Cazul 2. $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \geq 0$. Din relațiile (2) și (1) $a_{n+1} - a_n \geq -\frac{1}{8}(2a_n + a_{n-1}) \geq 0$ rezultă că șirul este monoton crescător și mărginit superior de zero. Deci $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l \Rightarrow l = 0$.

i₈. Se dă șirul $(x_n)_{n \geq 1}, x_n > 0, \forall n \geq 1$ pentru care $x_{n+1} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n^2}$,
 $\forall n \geq 1$ și $a_n = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$.

a) Să se arate că șirul $(a_n)_{n \geq 0}$ este monoton. b) Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

c) Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. (O.M. faza locală 1975)

Soluție. a) $a_{n+1} - a_n = \frac{nx_{n+1} - (x_1 + \dots + x_n)}{n(n+1)} \leq \frac{\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n^2} - (x_1 + \dots + x_n)}{n(n+1)} < 0$,

deci $a_{n+1} < a_n, 0 < a_n \leq a_1$.

b) Conform criteriului lui Weierstrass $a_n \rightarrow a, 0 < x_{n+1} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n^2} = \frac{a_n}{n} \Rightarrow a \cdot 0 = 0$, deci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$. c) $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \rightarrow 0$, deci $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

i₉. Fie $(a_n)_{n \geq 0}$ un șir mărginit verificând inegalitatea $a_{n+1} \leq \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1})$.

a) Să se arate că șirul $(A_n)_{n \geq 0}$, definit de relația $A_n = \max(a_n, a_{n+1})$, este convergent. b) Să se deducă de aici că șirul $(a_n)_{n \geq 0}$ este convergent.

(O.M., etapa finală, 1973)

Soluție. a) Fie $A_n = \max(a_n, a_{n+1})$ mărginit. Dacă $a_{n+1} \geq a_n$ atunci $A_n = a_{n+1}$ și $a_{n+2} \leq \frac{1}{2}(a_n + a_{n+1}) \leq a_{n+1}$ și $A_{n+1} = \max(a_{n+1}, a_{n+2}) = a_{n+1} = A_n$. Dacă $a_{n+1} < a_n$

atunci $A_n = a_n, a_{n+2} \leq \frac{1}{2}(a_n + a_{n+1}) \leq a_n$, deci $A_{n+1} \leq \max(a_n, a_{n+1}) = a_n = A_n$.

Deci, A_n este descrescător și deci convergent. b) Avem evident $a_n \leq A_n < a + \frac{\varepsilon}{3}$

pentru $n \geq N_\varepsilon$: rezultă $a_{n-1} < a + \frac{\varepsilon}{3}$. Dacă $a_n > a - \frac{\varepsilon}{3}$ atunci $|a_n - a| < \varepsilon$.

Dacă $a_n \leq a - \frac{\varepsilon}{3}$, cum $A_n > a_n - \frac{\varepsilon}{3}$ rezultă $a_{n+1} > a - \frac{\varepsilon}{3}$, dar din enunț avem

$a_n \geq 2a_{n+1} - a_{n-1} > 2a - \frac{2\varepsilon}{3} - a - \frac{\varepsilon}{3} = a - \varepsilon$. Deci, și în acest caz $|a_n - a| < \varepsilon$

adică $a_n \rightarrow a$.

i₁₀. Fie $a \geq 1$ dat. Să se studieze convergența șirului mărginit $(x_n)_{n \geq 1}$ ce

satisfacă condiția $x_n \leq x_{n+1} a^{(a-1)a^{-n}}, \forall n \geq 1$. (O.M., etapa județeană 1987)

Soluție. 1) Dacă $a = 1$, atunci $x_n \leq x_{n+1}$, șirul fiind monoton și mărginit, conform criteriului Weierstrass rezultă că este convergent.

2) Dacă $a > 0$, pentru a evita dificultăți de scriere vom nota $g_n = a^{-a^{1-n}}$ și vom transcrie inegalitatea recursivă sub forma (*) $x_n \cdot g_n \leq x_{n+1} \cdot g_{n+1}$, adică șirul cu termenul general $y_n = x_n \cdot g_n$ este monoton crescător. Ipoteza mărginirii lui x_n asigură existența lui M încât $\forall n \in \mathbb{N}^*, |x_n| \leq M$.

Avem $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{1-n} = 0$, deci g_n este convergent la 1. Rezultă că este mărginit de

un $B > 0$. Urmează $|y_n| \leq MB, \forall n \in \mathbb{N}^*$, deci y_n este și mărginit, deci convergent.

Urmează că și $x_n = \frac{y_n}{g_n}$ este convergent și $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.

Metoda 2. Vom intercala șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ dat prin relația de recurență între două șiruri α_n și β_n care converg la aceeași limită l , adică $\alpha_n \leq x_n \leq \beta_n$ unde $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = l$. Va rezulta $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$.

i₁₁. Fie șirurile $(x_n)_{n \geq 0}, (y_n)_{n \geq 0}, (z_n)_{n \geq 0}$ de numere reale pozitive astfel încât

$$3x_{n+1} \leq y_n + z_n, 3y_{n+1} \leq x_n + z_n, 3z_{n+1} \leq x_n + y_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$.

Soluție. Considerăm $(t_n)_{n \geq 0}$ cu $t_n = x_n + y_n + z_n \geq 0$. Adunând inegalitățile date deducem $3t_{n+1} \leq 2t_n$. Urmează $0 \leq t_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n t_0$, deci $t_n \rightarrow 0$. Mai deducem

$0 \leq 4x_{n+1} \leq t_n$, deci $x_{n+1} \rightarrow 0$, etc.

i₁₂. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$, $(y_n)_{n \geq 0}$, $(z_n)_{n \geq 0}$ trei șiruri de numere reale pozitive astfel încât $x_{n+1} \leq ax_n + by_n + cz_n$, $y_{n+1} \leq bx_n + cy_n + az_n$, $z_{n+1} \leq cx_n + ay_n + bz_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ unde $a, b, c \in \mathbb{R}$, iar $a^2 + b^2 + c^2 < \frac{1}{3}$. Să se demonstreze că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0.$$

Soluție. Adunând relațiile se obține $x_{n+1} + y_{n+1} + z_{n+1} \leq (a+b+c) \cdot (x_n + y_n + z_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$; dar $x_n + y_n + z_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ deci și $a+b+c \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$; aplicând inegalitatea lui Cauchy – Schwarz – Buniakowski se obține

$$(a \cdot 1 + b \cdot 1 + c \cdot 1)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(1^2 + 1^2 + 1^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2) < 3 \cdot \frac{1}{3} = 1$$

deci $(a+b+c)^2 < 1$, deci $a+b+c \in [0, 1)$. Dacă $a+b+c = 0$ rezultă $x_n = y_n = z_n = 0$ deci șirurile sunt convergente la zero. Dacă $a+b+c \in (0, 1)$, notând $x_n + y_n + z_n = t_n$ se obține că $t_{n+1} \leq (a+b+c)t_n$, $\forall n \geq 0$, relație din care se obține $0 \leq t_n \leq (a+b+c)^n t_0$. Aplicând criteriul intercalării se obține că $t_n \rightarrow 0$. Dar $0 \leq x_n \leq t_n$, $0 \leq y_n \leq t_n$, $0 \leq z_n \leq t_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Deci, conform criteriului intercalării, rezultă că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$.

Metoda 3. Aplicând criteriul majorării, din $|x_n| \leq \alpha_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n \rightarrow 0$, se va obține că șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ converge la zero.

i₁₃. Fie $(x_n)_{n \geq 1}$ un șir de numere pozitive astfel ca $(n+1)x_{n+1} - nx_n < 0$, $\forall n \geq 1$. Să se arate că șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este convergent și să se calculeze limita sa.
(Examen Admitere, 1987, Facultatea de Matematică)

Soluție. Relația de recurență se scrie sub forma $x_{n+1} \leq \frac{n}{n+1}x_n$, $n \geq 1$; dând valori particulare lui n , rezultă $x_2 \leq \frac{1}{2}x_1$, $x_3 \leq \frac{2}{3}x_2$, ..., $x_n \leq \frac{n-1}{n}x_{n-1}$.

Ținând seama că $x_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}^*$ înmulțind inegalitățile de mai sus, se obține $x_n \leq \frac{1}{n}x_1$ sau $|x_n| \leq \frac{1}{n}x_1$, $\forall n \geq 1$ dar $\frac{1}{n}x_1 \rightarrow 0$, deci, conform criteriului majorării, șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ converge la zero.

i₁₄. Fie șirurile $(a_n)_{n \geq 0}$, $(b_n)_{n \geq 0}$, $(c_n)_{n \geq 0}$ astfel încât a_n, b_n, c_n pentru orice $n \in \mathbb{N}$ formează lungimile laturilor unui triunghi. Să se demonstreze că

1) dacă $(a_n)_{n \geq 0}$, $(b_n)_{n \geq 0}$ converg la zero atunci și șirul $(c_n)_{n \geq 0}$ converge la zero; 2) dacă șirul $(a_n)_{n \geq 0}$ converge la zero iar șirurile $(b_n)_{n \geq 0}$, $(c_n)_{n \geq 0}$ au limite atunci aceste limite sunt egale.

Soluție. 1) Din inegalitatea triunghiulară $\forall n \in \mathbb{N}$ avem $c_n < a_n + b_n$ deci $c_n = |c_n| < a_n + b_n \rightarrow 0$, conform criteriului majorării, rezultă că $c_n \rightarrow 0$.

2) Dacă $b_n \rightarrow b$, $c_n \rightarrow c$, din inegalitatea triunghiulară avem $|b_n - c_n| < |a_n| = a_n \rightarrow 0$, dar $|b - c| = |b - b_n + b_n - c_n + c_n - c| \leq |b - b_n| + |b_n - c_n| + |c_n - c| \rightarrow 0$, deci $b = c$.

b) Probleme propuse

1. Pentru $a \in (0, 1)$ fixat, fie $(x_n)_{n \geq 0}$ un șir de numere strict pozitive cu proprietatea $x_0 = 1$ și $x_{n+1} \leq ax_n$, $\forall n \geq 0$. Să se arate că șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este convergent și să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

2. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ un șir de numere strict pozitive cu proprietatea că $x_0 = a > 0$ și $x_{n+1} \leq \frac{x_n^2}{a + x_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Să se arate că șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este convergent și să se calculeze $\inf_{n \in \mathbb{N}} x_n$, $\sup_{n \in \mathbb{N}} x_n$.

3. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 0}$, $0 < x_{n+1} + x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ și $x_{n+1}^2 < x_n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Să se arate că șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este convergent.

4. Să se demonstreze că dacă șirul de numere reale $(x_n)_{n \geq 0}$ satisface condițiile $x_{n+1}^5 + x_n^5 < 1 < x_{n+1} + x_n$, $x_{n+1}^3 < x_n^3$, $\forall n \in \mathbb{N}$, atunci el este convergent.

5. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$, $(y_n)_{n \geq 0}$, $(z_n)_{n \geq 0}$ trei șiruri de numere reale pozitive astfel încât $4x_{n+1} \leq y_n + z_n$, $4y_{n+1} \leq x_n + z_n$, $4z_{n+1} \leq x_n + y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Să se arate că șirurile sunt convergente și $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$.

6. Fie $a \in (0, +\infty)$ și șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ astfel încât $0 < x_n < 2a$ și $x_n(2a - x_{n+1}) > a^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Să se arate că șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este convergent și să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

7. Se dă șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ ce satisface condițiile $0 < x_n < 1$ și $x_{n+1}(1 - x_n) > \frac{1}{4}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{2}$.

8. Șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ satisface $x_n \in (0, b)$, $n \in \mathbb{N}$ și $x_{n+1}(a - x_n) > \frac{b^2}{4}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ($a > 0$). Arătați că șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este convergent și calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

9. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ cu proprietățile $0 < x_n < 2$ și $(2 - x_n)x_{n+1} > 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Să se arate că șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este convergent și să se afle limita sa.

10. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ astfel încât $0 < x_n < p$ și $4(p - x_n)x_{n+1} > p^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Să se arate că șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este convergent și să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

11. Fie $(x_n)_{n \geq 1}$ un șir de numere strict pozitive cu proprietatea $2nx_n \leq (2n-1)x_{n-1}$, $\forall n \geq 2$, $x_1 = a > 0$. Să se arate că șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este convergent și să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. (Examen Admitere 1987)

12. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ un șir ce satisface proprietățile $x_n \geq 1$ și $x_{n+1}^3 \leq 3x_n^2 - 3x_n + 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Să se arate că șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este convergent și să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

13. Pentru $a > 0$ fixat fie $(x_n)_{n \geq 0}$ un șir de numere strict pozitive cu proprietatea $x_{n+1}^2 \leq 2ax_n - a^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Să se arate că șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este convergent și să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, $\inf_{n \in \mathbb{N}} x_n$, $\sup_{n \in \mathbb{N}} x_n$.

14. Aflați șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ știind că $x_0 \in (0, 1]$ și $0 < x_{n+1} \leq 2 - \frac{1}{x_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

15. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ satisfăcând condițiile: 1) $x_0, x_1 \in [1, 2]$, $x_0 \geq x_1$;

2) $x_{n+2} = \frac{x_{n+1} + x_n}{2\sqrt{x_n x_{n+1}}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$; 3) $x_{n+1}^3 \geq x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Să se studieze convergența șirului și, eventual, să se calculeze limita.

16. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ cu termeni nenegativi care satisfac relația $x_{n+1}^3 \leq 3x_n - 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Determinați x_0 pentru care există un șir $(x_n)_{n \geq 0}$ verificând relația dată și apoi studiați șirul $(x_n)_{n \geq 0}$.

17. Termenii șirului $(x_n)_{n \geq 0}$ sunt pozitivi și verifică relația

$1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} x_k^k \leq x_{n+1} \leq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} x_k^k$. Să se arate că șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este convergent și să se calculeze limita.

18. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ un șir de numere reale pozitive cu proprietatea că $\exists q > 0$ astfel încât $a_n - a_{n+1} \geq qa_n^2$, $\forall n \geq 1$. Să se arate că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este convergent, iar șirul $(na_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este majorat de q^{-1} .

19. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ ce satisface $x_n > 0$ și $x_{n+1} \leq \frac{x_n}{\sqrt{1+x_n^2}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Să se arate că șirul este convergent și să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. (A.S.)

20. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ cu termenii pozitivi ce satisfac relația $x_{n+1}^3 + (2n+1)x_{n+1} \leq x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_0 = a > 0$. Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, $\inf_{n \in \mathbb{N}} x_n$, $\sup_{n \in \mathbb{N}} x_n$. (A.S.)

21. Fie șirurile $(a_n)_{n \geq 0}$, $(b_n)_{n \geq 0}$, $(c_n)_{n \geq 0}$, $(d_n)_{n \geq 0}$ de numere reale pozitive, astfel încât $4a_{n+1} \leq b_n + c_n + d_n$, $4b_{n+1} \leq a_n + c_n + d_n$, $4c_{n+1} \leq a_n + b_n + d_n$ și $4d_{n+1} \leq a_n + b_n + c_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Să se arate că șirurile sunt convergente și au aceeași limită. (A.S.)

22. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 2}$ cu termenii strict pozitivi ce satisfac relația $x_{n+1} \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Să se arate că șirul $(x_n)_{n \geq 2}$ este convergent și să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. (A.S.)

23. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ cu termenii strict pozitivi ce satisfac relația $(8n+1)x_{n+1} \leq (8n-1)x_n$, $\forall n \geq 1$. Să se arate că șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este convergent și să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. (A.S.)

24. Știind că $x_n > 0$ și $x_{n+1} \leq \frac{x_n}{1 + \sqrt{1+x_n^2}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, să se arate că $(x_n)_{n \geq 0}$ este un șir convergent și să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, $\sup_{n \in \mathbb{N}} x_n$, $\inf_{n \in \mathbb{N}} x_n$. (A.S.)

25. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ ce satisface $x_0 = a > 1$ și $x_n \geq x_{n+1}^2 - x_{n+1} + 1$, $\forall n \geq 0$. Să se arate că șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este convergent și să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, $\sup_{n \in \mathbb{N}} x_n$, $\inf_{n \in \mathbb{N}} x_n$. (A.S.)

26. Se consideră șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ care îndeplinește condițiile $x_0 \in (0, 1, 2)$ și $1 - (x_{n-1})^{n+1} \leq x_{n+1} \leq 1 + (x_{n-1})^{n+1}$, $\forall n \geq 1$. Să se arate că șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este convergent și să se afle limita.

27. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ ce satisface relațiile $x_n > 0$, $x_{n+1} + x_{n+1}^3 \leq x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Să se arate că șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este convergent și să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, $\inf_{n \in \mathbb{N}} x_n$, $\sup_{n \in \mathbb{N}} x_n$. (A.S.)

28. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ cu termenii supraunitari ce satisfac relația $x_{n+1}^2 - x_{n+1} + 1 \leq x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_0 = a > 1$. Să se arate că șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este convergent și să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, $\sup_{n \in \mathbb{N}} x_n$, $\inf_{n \in \mathbb{N}} x_n$. (A.S.)

29. Dacă șirurile $(x_n)_{n \geq 1}$, $(y_n)_{n \geq 1}$ cu termenii pozitivi îndeplinesc condițiile

1) șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este crescător și mărginit superior;

2) șirul $(y_n)_{n \geq 1}$ este descrescător și convergent la zero,

atunci șirul $\left(\frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n}{n} \right)_{n \geq 1}$ este convergent la zero.

30. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ ce satisface inegalitățile $x_n > 0$, $\forall n \geq 1$; $x_{n+m} \leq x_n \cdot x_m$, $\forall n, m \in \mathbb{N}^*$; $x_1 \in (0, 1)$. Să se arate că șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este convergent și să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, $\inf_{n \in \mathbb{N}} x_n$, $\sup_{n \in \mathbb{N}} x_n$.

CAPITOLUL II

APLICAȚII ÎN ALGEBRĂ

§ 1. Puterile matricilor de ordin doi

Se demonstrează, cu ușurință prin inducție completă, următoarele proprietăți ale operațiilor cu matrice.

Fie $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ cu $AB = BA$; atunci au loc proprietățile:

$$P_1. A^m = A \cdot A^{m-1}, \forall m \in \mathbb{N}, m \geq 1;$$

$$P_2. A \cdot B^m = B^m \cdot A, \forall m \in \mathbb{N};$$

$$P_3. A^m \cdot B = B \cdot A^m, \forall m \in \mathbb{N};$$

$$P_4. (A \cdot B)^m = A^m \cdot B^m, \forall m \in \mathbb{N};$$

$$P_5. A^m \cdot B^p = B^p \cdot A^m, \forall m, p \in \mathbb{N};$$

$$P_6. A^m - B^m = (A - B)(A^{m-1} + A^{m-2} \cdot B + \dots + A \cdot B^{m-2} + B^{m-1}), \forall m \in \mathbb{N}, m \geq 2;$$

$$P_7. (A + B)^m = C_m^0 A^m + C_m^1 A^{m-1} \cdot B + C_m^2 A^{m-2} \cdot B^2 + \dots + C_m^m B^m, \forall m \in \mathbb{N}^*.$$

Pentru ridicarea la exponent natural $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ vom pune în evidență câteva metode.

Metoda 1. Matricea $A = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, prin ridicarea la exponentul

$n \in \mathbb{N}^*$ are forma $A^n = \begin{pmatrix} \cos nt & -\sin nt \\ \sin nt & \cos nt \end{pmatrix}$, rezultat ce se poate verifica prin inducție completă. Folosind acest rezultat vom deduce forma puterii a n -a pentru matricele $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ cu $a, b \in \mathbb{R}$, $a^2 + b^2 \neq 0$. Notând

$$\cos t = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \sin t = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left(\left| \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| \leq 1, \left| \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| \leq 1 \right), A$$

și B se aduc la forma: $A = \sqrt{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$, respectiv

$$B = \sqrt{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Rezultă că: $A^n = \left(\sqrt{a^2 + b^2} \right)^n \begin{pmatrix} \cos nt & -\sin nt \\ \sin nt & \cos nt \end{pmatrix}$, respectiv

$$B^n = \left(\sqrt{a^2 + b^2} \right)^n \begin{pmatrix} \cos nt & \sin nt \\ -\sin nt & \cos nt \end{pmatrix}, n \in \mathbb{N}^*.$$

Exemplul 1. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ unde $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $a^2 + b^2 < 1$.

Să se arate că puterile A^n , $n \geq 1$ sunt de forma $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ -b_n & a_n \end{pmatrix}$ unde $(a_n)_{n \geq 1}$, $(b_n)_{n \geq 1}$ sunt șiruri convergente la zero. (O.M. etapa județeană 1981)

Soluție. Dacă $a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a = b = 0$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, atunci $A^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $n \geq 1$ și $a_n = 0$, $b_n = 0$, deci sunt șiruri convergente la zero.

Dacă $0 < a^2 + b^2 + 1$, notând $\cos t = a \cdot (a^2 + b^2)^{-1/2}$, $\sin t = b \cdot (a^2 + b^2)^{-1/2}$ deducem $a_n = (\sqrt{a^2 + b^2})^n \cos nt$, $b_n = (\sqrt{a^2 + b^2})^n \sin t$.

Prin criteriul majorării se asigură $a_n \rightarrow 0$, $b_n \rightarrow 0$.

Metoda 2. Orice matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ verifică o ecuație de forma

$A^2 - (\text{Tr } A) A + \det A \cdot I_2 = O_2$ (numită *ecuație caracteristică* asociată matricii A), unde $\text{Tr } A = a + d$ (urma matricii) și $\det A = ad - bc$. Se demonstrează prin inducție că există două șiruri reale $(x_n)_{n \geq 1}$, $(y_n)_{n \geq 1}$, astfel încât $A^n = x_n A + y_n I_2$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ unde $x_1 = 1$, $y_1 = 0$, $x_2 = \text{Tr } A$, $y_2 = -\det A$. Pentru a evidenția relațiile de recurență constatăm $A^{n+1} = A^n \cdot A = (x_n A + y_n I_2) \cdot A = x_n A^2 + y_n A = x_n (x_2 A + y_2 I_2) + y_n A = (x_2 x_n + y_2) A + y_2 x_n I_2$ deci

$$(1) x_{n+1} = x_2 x_n + y_2 \text{ și } y_{n+1} = y_2 x_n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Exemplul 2. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Să se calculeze A^n , $n \in \mathbb{N}^*$.

Soluție. $A^2 - (\text{Tr } A) A + (\det A) I_2 = O_2$, $x_2 = \text{Tr } A = 2$, $\det A = 1 = -y_2$, $x_1 = 1$, $y_1 = 0$. $A^n = x_n A + y_n I_2$, $n \geq 2$, deci, conform cu (1): $x_{n+1} = 2x_n + y_n$, $y_{n+1} = -x_n$ sau $x_{n+1} = 2x_n - x_{n-1}$, $n \geq 2$. Ecuația caracteristică asociată relației de recurență liniară de ordinul doi va fi: $r^2 = 2r - 1$ cu $r_1 = r_2 = 1$, prin urmare: $x_n = c_1 + nc_2$.

Pentru $n = 1$ și $n = 2$ obținem $c_1 = 0$, $c_2 = 1$, deci $x_n = n$; urmează $y_n = -(n-1)$

și $A^n = n \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (-n+1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Rezultatul se poate verifica ușor prin inducție matematică.

Metoda 3. Pentru a calcula A^n , $A \in M_2(\mathbb{C})$ se calculează A^2 , A^3 , A^4 etc până se observă o regulă de obținere a matricii A^n , prin inducție completă se atestă această regulă.

Exemplul 3. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Să se calculeze A^n , $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

Soluție. Se observă că $A^2 = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 2^3 & 0 \\ 0 & 3^3 \end{pmatrix}$, deci presupunem că

$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$, $n \geq 1$. Prin inducție matematică se verifică ușor corectitudinea presupunerii făcute.

Exemplul 4. Să se calculeze A^n , $n \in \mathbb{N}^*$, dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Soluție. $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I$, $A^3 = A^2 \cdot A = 2I \cdot A = 2A$, $A^4 = A^2 \cdot A^2 = (2I) \cdot (2I) = 2^2 I$, $A^5 = A^4 \cdot A = 2^2 A$. Se observă că $A^n = \begin{cases} 2^{\frac{n}{2}} I, & n = 2K \\ 2^{\frac{n}{2}} A, & n = 2K+1, K \in \mathbb{N} \end{cases}$.

La verificarea acestui rezultat vom aplica o inducție matematică specială.

$P(1)$: $A^1 = 2^{\frac{1}{2}} A = 2^0 \cdot A = A$, $P(1)$ adevărată.

$P(2)$: $A^2 = 2^{\frac{2}{2}} I = 2 \cdot I$, $P(2)$ adevărată. Presupunem că $P(m)$ adevărată.

$$P(m): A^m = \begin{cases} 2^{\frac{m}{2}} I, & m = 2K \\ 2^{\frac{m}{2}} A, & m = 2K+1, m \in \mathbb{N}, m \geq 2 \end{cases}$$

și demonstrăm că

$$P(m+1): A^{m+1} = \begin{cases} 2^{\frac{m+1}{2}} I, & m = 2K+2 \\ 2^{\frac{m+1}{2}} A, & m = 2K+3 \end{cases}$$

este adevărată. Dacă $m+1 = 2k+2$, atunci $A^{m+1} = A^m \cdot A = (2^k A) \cdot A = 2^k \cdot A^2 = 2^k \cdot 2 \cdot I = 2^{k+1} I$. Dacă $m+1 = 2k+3$, atunci $A^{m+1} = A^m \cdot A = (2^k A) \cdot A = 2^k A^2 = 2^k \cdot 2I = 2^{k+1} I$, deci $P(m+1)$ adevărată. Deci, $P(m) \Rightarrow P(m+1)$, $\forall m \in \mathbb{N}^*$. Prin urmare $P(n)$ este adevărată $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

Metoda 4. Scriind $A^n = \begin{pmatrix} x_n & y_n \\ z_n & t_n \end{pmatrix}$, atunci $A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} x_{n+1} & y_{n+1} \\ z_{n+1} & t_{n+1} \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ax_n + cy_n & bx_n + dy_n \\ az_n + ct_n & bz_n + dt_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n+1} & y_{n+1} \\ z_{n+1} & t_{n+1} \end{pmatrix}$, de unde se obțin pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ relațiile de recurență:

$$(2) x_{n+1} = ax_n + cy_n, y_{n+1} = bx_n + dy_n, z_{n+1} = az_n + ct_n, t_{n+1} = bz_n + dt_n.$$

Exemplul 5. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Să se arate că matricea A^n , $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ se

poate pune sub forma $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x_n & 1 \end{pmatrix}$ și să se stabilească o relație de recurență pentru șirul $(x_n)_{n \geq 1}$.

Soluție. Calculând A^2, A^3 deducem $x_2 = 2, x_3 = 3$. Recurența $x_{n+1} = 1 + x_n$ asigură $x_n = n$.

Metoda 5. Dacă matricea $A \in M_2(\mathbb{C})$ se poate scrie sub forma $A = B + C$, unde $B, C \in M_2(\mathbb{C}), B \cdot C = C \cdot B$, atunci se poate aplica binomul lui Newton pentru calculul lui $A^n, n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.

Exemplul 6. Să se calculeze $A^n, n \in \mathbb{N}^*$ dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Soluție. Matricea A se poate scrie sub forma $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = I_2 + B$, $IB = BI$. Pentru calculul lui A^n se aplică binomul lui Newton: $A^n = (I + B)^n = C_n^0 I + C_n^1 B + C_n^2 B^2 + \dots + C_n^n B^n$. Dar $B^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, n \geq 2$, deci:

$$A^n = C_n^0 I + C_n^1 B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Metoda 6. Folosind izomorfismul care se poate stabili între anumite inele sau corpuri din care unul va fi inel sau corp de matrice se poate calcula $A^n, n \in \mathbb{N}^*$ unde A va fi o matrice de un anumit tip.

Exemplul 7. Fie mulțimea $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} / a, b \in \mathbb{R} \right\}$ și $\mathbb{C}$ mulțimea numerelor

complexe. Definim funcția $f: \mathbb{C} \rightarrow M, f(a + ib) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. Să se arate că:

- 1) f este bijectivă; 2) $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ au loc egalitățile: a) $f(z_1 + z_2) = f(z_1) + f(z_2)$;
- b) $f(z_1 \cdot z_2) = f(z_1) \cdot f(z_2)$; 3) $\forall z \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ are loc egalitatea $f(z^n) = (f(z))^n$;
- 4) folosind rezultatul de la 3) să se calculeze $A^n, B^n, n \in \mathbb{N}^*$ unde

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ și } B = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

Soluție. Deoarece 1), 2) și 3) nu conțin dificultăți, demonstrăm 4).

Conform rezultatului de la 3) avem:

$$A^n = f((a + bi)^n) = f\left(\left[\sqrt{a^2 + b^2} (\cos t + i \sin t)\right]^n\right) = f\left(\left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^n (\cos nt + i \sin nt)\right).$$

$$(\cos nt + i \sin nt) = \begin{pmatrix} \sqrt{a^2 + b^2} \cos nt & -\sqrt{a^2 + b^2} \sin nt \\ \sqrt{a^2 + b^2} \sin nt & \sqrt{a^2 + b^2} \cos nt \end{pmatrix},$$

unde $a = \sqrt{a^2 + b^2} \cos t, b = \sqrt{a^2 + b^2} \sin t, \sqrt{a^2 + b^2} \neq 0$. Dacă $\sqrt{a^2 + b^2} = 0$

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $A^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Dacă $\sqrt{a^2 + b^2} = 1$ matricea A

devine egală cu B și deci $B^n = \begin{pmatrix} \cos nt & -\sin nt \\ \sin nt & \cos nt \end{pmatrix}$.

Observație. Exemplul 7 dă o justificare teoretică pentru metoda 1 de ridicare a matricei A la exponentul $n \in \mathbb{N}^*$.

Exemplul 8. Fie $d \in \mathbb{Z}$ un număr ce nu este pătrat perfect și mulțimea $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & db \\ b & a \end{pmatrix} / a, b \in \mathbb{Z} \right\}, \mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} / a, b \in \mathbb{Z}\}$. Să se arate că funcția

$f: \mathbb{Z}[\sqrt{d}] \rightarrow M, f(a + b\sqrt{d}) = \begin{pmatrix} a & db \\ b & a \end{pmatrix}$ are proprietățile: 1) f este bijectivă;

2) $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ au loc egalitățile: a) $f(z_1 + z_2) = f(z_1) + f(z_2)$;

b) $f(z_1 \cdot z_2) = f(z_1) \cdot f(z_2)$; 3) $\forall z \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}], \forall n \in \mathbb{N}$ are loc egalitatea $f(z^n) = (f(z))^n$; 4) folosind rezultatul de la 3) să se calculeze $A^n, n \in \mathbb{N}^*$, unde $A = \begin{pmatrix} a & db \\ b & a \end{pmatrix} \in M$.

Probleme propuse

1. Fie matricea $A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Să se determine $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ pentru orice $n \geq 1$ și să se calculeze limitele șirurilor $(a_n), (b_n), (c_n), (d_n)$.

(Examen admitere, Electrotehnică, 1981.)

2. Dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ să se calculeze A^n .

3. Fie $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că dacă unul dintre șirurile $(a_n), (b_n), (c_n), (d_n)$ este progresie aritmetică, atunci și celelalte sunt progresii aritmetice.

(C. 237, G.M. 8/I982)

4. Pentru $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ să se determine x_n, y_n încât pentru $n \in \mathbb{N}^*$ să avem

$$A^n = x_n A + y_n I_2.$$

5. Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Să se pună în evidență șiruri $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ încât

$A^n = a_n A + b_n I_2$ și să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$.

6. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a+1 & b \\ c & d+1 \end{pmatrix}$ cu $ad = bc$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

1) Să se arate că există un număr real r astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = r^{n-1}A$. 2) Folosind egalitatea $B = I + A$, să se calculeze B^n , $n \in \mathbb{N}^*$. 3) Să se studieze convergența șirurilor $(x_n)_{n \geq 1}$, $(y_n)_{n \geq 1}$ definite prin

$$x_1 = p, y_1 = q, \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (\text{O.M., etapa locală, Buzău, 1976})$$

7. Se dă matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. 1) Să se determine A^n , $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. 2) Să se afle matricea $B = \sum_{k=1}^n A^k$ și să se calculeze $\det B$. (O.M., etapa locală, Iași, 1970)

8. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$. Să se determine cel mai mic număr $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $A^n = I$.

9. Să se determine $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2$ pentru care $A^n = \begin{pmatrix} a^n & b^n \\ c^n & d^n \end{pmatrix}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

10. Fie $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $a > 0$. 1) Să se calculeze A^n , $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. 2) Dacă $b_n = \sum_{k=1}^n \det A^k$, să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

11. Dacă $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, atunci A^n este $\begin{pmatrix} 3^{2k} & 0 \\ 0 & 3^{2k} \end{pmatrix}$ dacă $n = 2k$ și $\begin{pmatrix} -3^{2k} & 2 \cdot 3^{2k} \\ 4 \cdot 3^{2k} & 3^{2k} \end{pmatrix}$ dacă $n = 2k + 1$.

12. Fie $a > b > 0$ și matricele $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. a) Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ și orice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ se poate scrie $A^n = x_n I + y_n B$, $x_n, y_n \in \mathbb{R}$. b) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n}$. (O.M., București, 1987)

13. Dacă $x_1 = y_1 = 1$, $x_{n+1} = x_n + 2y_n$ și $y_{n+1} = x_n + y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, determinați A , B , $C \in M_2(\mathbb{R})$ și $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $A = B \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

$BC = CB = I$. Să se exprime x_n și y_n în funcție de a, b și să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n}$.

14. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. 1) Să se arate că $A^n = \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

unde $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, $n \geq 1$, $F_0 = 1$, $F_1 = 1$ (șirul lui Fibonacci). 2) Să se deducă egalitățile $F_{n+m-1} = F_n F_m + F_{n-1} F_{m-1}$ și $F_{n-1} F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$.

15. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Să se arate că: 1) $A^n = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$,

unde $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ (șirul lui Lucas);

2) din $\det A^n = (\det A)^n$ rezultă $L_n^2 - L_{n+1} \cdot L_{n-1} = 5(-1)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$;

3) din $\det A^{mn} = (\det A^m)^n$ rezultă $L_{mn}^2 - L_{n-1} L_{n+1} = (-5)^n [L_m^2 - L_{m+1} L_{m-1}]^n$, $\forall m, n \in \mathbb{N}^*$; 4) ce relație pentru șirul lui Lucas se deduce din $A^{m+n} = A^m \cdot A^n$, $\forall m, n \in \mathbb{N}^*$?

16. 1) Fie z, w două numere complexe, $z \neq 0$. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ să se calculeze A^n , unde $A = \begin{pmatrix} z & w \\ 0 & z \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$. 2) Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Să se determine z, w astfel încât $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. (Examen admitere, 1986)

17. Fie $\varepsilon = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ o rădăcină cubică a unității și matricea $A \in M_2(\mathbb{C})$, $A = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon^2 \end{pmatrix}$. Să se calculeze A^2, A^3 și suma $A^n + A^{n-1} + \dots + A + I_2$, $n \in \mathbb{N}^*$ unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. (Admitere, Facultatea de matematică, Iași, 1992)

18. Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ unde $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$, $\text{Tr } A = 1$. Să se arate că dacă există $p \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, astfel încât $A^{p-1} = A^p$, atunci $A^n = A$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

19. Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ unde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, astfel încât $\det A = \text{Tr } A = 1$. Câte elemente are mulțimea $\{A^n\}_{n \in \mathbb{N}}$?

20. Dacă $A \in M_2(\mathbb{C})$ și există $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$ cu $A^k = 0$, atunci $A^2 = 0$.

21. Fie $A = \begin{pmatrix} \cos^2 x & \sin^2 x \\ \sin^2 x & \cos^2 x \end{pmatrix}$. Să se calculeze: 1) A^n , $n \in \mathbb{N}^*$; 2) să se arate că

dacă $\frac{2x}{\pi} \notin \mathbb{Z}$ atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. (O.M. faza locală, Constanța, 1991)

22. Să se rezolve în $M_2(\mathbb{R})$ ecuația $X^n = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

23. Să se rezolve ecuația $X^n = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

24. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$. Să se calculeze $A^{-1}, A^2, \dots, A^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

25. Să se demonstreze că ecuația $X^n = I$ admite cel puțin n soluții în $M_2(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}^*$.

26. Fie $A = \begin{pmatrix} \cos t + \sin t & 2 \sin t \\ -2 \sin t & \cos t - \sin t \end{pmatrix}$. Să se calculeze A^n , $n \in \mathbb{N}^*$.

27. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k-1 & k \end{pmatrix}$, $3 \leq k \leq n$, $n \in \mathbb{N}$. Să se arate că A^n este de forma $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x_n & y_n \end{pmatrix}$, unde x_n, y_n și $n \in \mathbb{N}^*$ și să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n + y_n}{k^n + 1}$.

28. Să se rezolve în $M_2(\mathbb{R})$ ecuația $X^n = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

29. Fie $A = M_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\text{Tr } A > 2$. Să se arate că oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n \neq I$.

§ 2. Puterile matricilor de ordin trei

Fie $A \in M_3(\mathbb{R})$, $A = (a_{ij})$, $i, j = \overline{1, 3}$.

Ecuația (1) $\det(A - \lambda I_3) = 0$ se numește ecuația caracteristică a matricei A ; rădăcinile ecuației caracteristice se numesc rădăcini caracteristice sau valori proprii.

Este cunoscută **teorema lui Cayley-Hamilton**:

Orice matrice pătratică satisface propria sa ecuație caracteristică.

Ecuația caracteristică a matricei A se mai poate scrie sub forma

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (2) \quad \text{sau} \quad \lambda^3 - (\text{Tr } A)\lambda^2 + S(A)\lambda - \det A = 0 \quad (3)$$

unde $\text{Tr } A = a_{11} + a_{22} + a_{33}$ este urma matricei,

$$S(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \text{iar } \det A \text{ este determinantul}$$

matricei A . Ținând seama de teorema lui Cayley-Hamilton se obține relația

$$A^3 - \text{Tr } A \cdot A^2 + S(A)A - \det A \cdot I_3 = O_3. \quad (4)$$

Vom demonstra proprietatea $P(n)$: $A^n = x_n A^2 + y_n A + z_n I_3$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ (5)

Pentru $n = 1$ proprietatea este adevărată ($x_1 = 0, y_1 = 1, z_1 = 0$)

$n = 2$ proprietatea este adevărată ($x_2 = 1, y_2 = 0, z_2 = 0$)

$n = 3$ ținând seama de ecuația caracteristică avem $x_3 = \text{Tr } A$,

$y_3 = -S(A)$, $z_3 = \det A$. Presupunând $P(k)$ adevărată pentru $k \geq 3$, adică

$A^k = x_k A^2 + y_k A + z_k I_3$, avem $A^{k+1} = A^k \cdot A = (x_k A^2 + y_k A + z_k I_3) \cdot A =$

$$= (x_k x_k + y_k) A^2 + (y_k x_k + z_k) A + z_k x_k I_3.$$

$$\text{Notând (6)} \quad \begin{cases} x_{k+1} = x_k x_k + y_k \\ y_{k+1} = y_k x_k + z_k \\ z_{k+1} = z_k x_k \end{cases}, \text{ obținem (7) } A^{k+1} = x_{k+1} A^2 + y_{k+1} A + z_{k+1} I_3,$$

deci $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, deci $P(n)$ adevărată $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Din (6) rezultă relația de recurență (8) $x_{n+1} = x_n x_n + y_n$, $y_{n+1} = y_n x_n + z_n$, $z_{n+1} = z_n x_n$, $n \geq 3$, căreia i se asociază ecuația caracteristică (9) $r^3 = x_n r^2 + y_n r + z_n$ care este totuși cu ecuația caracteristică (3). Dacă ecuația caracteristică (9) are rădăcinile r_1, r_2, r_3 reale distincte atunci $x_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n + c_3 r_3^n$. Dacă $r_1 = r_2 \in \mathbb{R}$ și $r_1 \neq r_3 \in \mathbb{R}$, atunci $x_n = (c_1 + c_2 n) r_1^n + c_3 r_3^n$. Dacă $r_1 \in \mathbb{R}$ dar $r_2, r_3 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, fie $r_3 = R(\cos t + i \sin t)$, atunci $x_n = c_1 r_1^n + R^n (c_2 \cos nt + c_3 \sin nt)$. În cele ce urmează vom prezenta câteva metode de a calcula A^n , $n \in \mathbb{N}$, cu $A \in M_3(\mathbb{R})$.

Metoda 1. Se calculează A^n aplicând teoria prezentată mai sus.

$$\text{Exemplul 1. Fie } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Să se calculeze } A^n, n \in \mathbb{N}^*.$$

Soluție. $\text{Tr } A = 3$, $S(A) = 3$, $\det A = 1$ deci ecuația caracteristică a matricei A devine: $A^3 = 3A^2 - 3A + I_3$, $x_3 = 3$, $y_3 = -3$, $z_3 = 1$. Ecuația caracteristică (9) devine: $r^3 = 3r^2 - 3r + 1$; rezultă $r_1 = r_2 = r_3 = 1$. Ținând seama că $x_1 = 0$, $x_2 = 1$,

$x_3 = 3$, obținem a, b, c , deci șirul x_n devine $x_n = \frac{n^2 - n}{2}$. Din $z_n = z_3 x_{n-1}$,

$$y_n = y_3 x_{n-1} + z_{n-1} \text{ se obține: } z_n = \frac{(n-1)(n-2)}{2}, y_n = -n(n-2).$$

Deci $A^n = x_n A^2 + y_n A + z_n I_3$, devine

$$A^n = \frac{n^2 - n}{2} A^2 - n(n-2) A + \frac{(n-1)(n-2)}{2} I_3, \text{ de unde se obține}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, n \in \mathbb{N}^*.$$

Metoda 2. Pentru a calcula A^n , $A \in M_3(\mathbb{R})$ se calculează A^2, A^3, A^4 etc. până se observă o regulă de obținere a matricei A^n , rezultat ce se verifică prin inducție matematică.

Exemplul 2. Să se calculeze A^n , $n \in \mathbb{N}$ pentru $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Soluție. Avem: $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 & 2^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2^2 & 0 & 2^2 \end{pmatrix}$, $A^4 = \begin{pmatrix} 2^3 & 0 & 2^3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2^3 & 0 & 2^3 \end{pmatrix}$, deci se

presupune că $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$ după care se demonstrează prin inducție completă acest rezultat.

Metoda 3. Presupunând $A^n = \begin{pmatrix} x_n & y_n & z_n \\ \alpha_n & \beta_n & \gamma_n \\ u_n & v_n & t_n \end{pmatrix}$, din relația $A^{n+1} = A^n \cdot A$ se obține

relația de recurență pentru șirurile ce intervin în matrice.

Exemplul 3. Să se calculeze A^n , $n \in \mathbb{N}$ pentru $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Soluție. Se observă că $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -3 \\ -3 & 5 & -3 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ din care se

poate presupune că matricea A^n este de forma $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{pmatrix}$. Se obțin

relațiile de recurență: $\begin{cases} a_{n+1} = a_n - 2b_n \\ b_{n+1} = -a_n \end{cases}$, $n \geq 1$, de unde rezultă

$$a_n = \frac{1}{3} [2^{n+1} + (-1)^n], b_n = -\frac{1}{3} [2^n + (-1)^{n-1}].$$

$$b_n = \frac{a_n - a_{n+1}}{2}$$

$$b_{n+1} = \frac{a_{n+1} - a_{n+2}}{2} = -a_n \quad a_{n+1} - a_{n+2} + 2a_n = 0$$

Metoda 4. În anumite cazuri matricea A se poate scrie ca o sumă de două matrice care comută și pentru care puterile se calculează mai ușor.

Exemplul 4. Să se calculeze A^n , $n \in \mathbb{N}^*$ pentru $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Soluție. Se observă că $A = I_3 + B$ unde $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și

$I \cdot B = B \cdot I$. Aplicăm binomul lui Newton:

$$A^n = (I + B)^n = C_n^0 I + C_n^1 B + C_n^2 B^2 + C_n^3 B^3 + \dots + C_n^n B^n.$$

Se calculează $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_3$, din care prin inducție se

demonstrează că $B^n = O_3$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Cum $I_3^n = I$, $\forall n \in \mathbb{N}$ se obține:

$$A^n = (I + B)^n = I + C_n^1 B + C_n^2 B^2 \text{ sau } A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Probleme propuse

1. Se dă matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. a) Să se calculeze A^2, A^3 . b) Să se arate că

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, A^n are forma $A^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Se dă matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Să se calculeze A^n , $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Să se calculeze A^n , $n \in \mathbb{N}^*$ dacă $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. (O.M., județ, 1976)

4. Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ există a_n, b_n încât

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n & a_n \\ 0 & 1 & b_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Dacă a, b, c sunt numere reale și $a + b + c = 0$, să se calculeze puterile a n -a ($n \in \mathbb{N}, n > 1$) ale matricilor:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a+b & 0 & a \\ 0 & b & a \\ a & 0 & a+b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a+b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ b & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Să se calculeze pentru $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^n, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^n, \begin{pmatrix} 2 & 9 & 4 \\ 7 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 8 \end{pmatrix}^n$$

7. Să se determine a_n, b_n, c_n încât pentru $n \in \mathbb{N}^*$ să aibă loc

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & c_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8. Să se determine a_n, b_n încât pentru $n \in \mathbb{N}^*$ să aibă loc

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{pmatrix} \text{ și să se calculeze } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$$

9. Pentru $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{3}$ să se determine a_n, b_n încât să aibă loc

$$\begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{O.M., etapa locală, Constanța, 1984})$$

$$10. \text{ Fie, pentru } t \in \mathbb{R}, \text{ matricea } A(t) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{t^2}{2} & -\frac{t^2}{2} & t \\ \frac{t^2}{2} & 1 - \frac{t^2}{2} & t \\ t & -t & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Să se arate: $A(t+u) = A(t) \cdot A(u), A^{-1}(t) = A(-t)$.
b) Să se determine polinoamele $A^n(t)$.

11. Să se calculeze puterile a n -a ($n \in \mathbb{N}, n > 1$) ale matricilor

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -a & 1 & -\frac{a^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ și } B = \begin{pmatrix} 1 & a & 2a(a+1) \\ 0 & 1 & 4a \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

12. Pentru $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ să se calculeze A^n .

13. Să se calculeze puterile a n -a ale matricilor

$$A = \begin{pmatrix} a+b & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a+b \end{pmatrix} \text{ și } B = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a+b & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$$

14. Calculați $\begin{pmatrix} a & 2b & a \\ b & 2a & b \\ a & 2b & a \end{pmatrix}^n$ pentru $n \in \mathbb{N}^*$.

15. Pentru $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$ cu $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$, notăm $B_n = A^n + A^{n+1} + A^{n+2}$.

a) Determinați A^n . b) Precizați a încât B_n să fie inversabile.

c) Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ găsiți a încât $\sum_{k=1}^n \det B_k = 0$.

$$16. \text{ Fie } M = \left\{ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & a & 1 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

a) Să se arate că $(M, \cdot)$ este grup multiplicativ. b) Pentru $A \in M$ să se exprime A^n . (Admitere, Facultatea de Matematică, Iași, 1993)

$$17. \text{ Fie matricea } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Să se calculeze A^2 și A^3 . b) Să se demonstreze $A^{3n+1} = A, \forall n \in \mathbb{N}$.

c) Să se determine parametrul real λ pentru care matricea $B_\lambda = I + \lambda A + \lambda^2 A^2$ este inversabilă. (Admitere, I.S.E., Iași, 1994)

18. Fie $M = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R} \right\}$.

- a) Să se calculeze A^n .
 b) Să se cerceteze dacă există $B \in M$ încât $B^n = B, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
 c) Să se determine $E \in M$ astfel încât $AE = EA = A$.
 d) Să se determine A^{-1} astfel încât $AA^{-1} = A^{-1}A = E, \forall A \in M$.
 (O.M., etapa locală, Timișoara, 1978)

19. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Să se arate că $A^n = A^{n-2} + A^2 - I, \forall n \in \mathbb{N},$

$n \geq 3$. Să se calculeze $A^n, n \in \mathbb{N}^*$.

20. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} k & 2-k & -1 \\ 2-k & k & (k-1)^2 \\ -1 & k & 2-k \end{pmatrix}, k \in \mathbb{R}$. Să se arate că există

două matrice $B, C \in M_3(\mathbb{R})$ astfel încât $A^n = B^n + C^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

21. Se dau matricele: $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -a & -1 \\ -a & a^2 & a \\ -1 & a & 1 \end{pmatrix}$.

Să se arate că $(A+B)^n = A^n + B^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

22. În $M_3(\mathbb{Z})$ se consideră matricele: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- 1) Să se arate că $AB = BA$. 2) Să se calculeze $A^n, B^n, n \geq 1$.
 3) Folosind rezultatul 1) să se calculeze: C^n, D^n , unde

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

23. Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Să se arate că: $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & n \cdot 4^{n-1} \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}, \forall$

$n \in \mathbb{N}^*$.

24. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} a^p + p & a^p & a^p \\ a^p & a^p + p & a^p \\ a^p & a^p & a^p + p \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{N}$.

- 1) Să se determine $A^n, n \in \mathbb{N}^*$.
 2) Dacă $p = 0$, să se calculeze $\det A^n$. (O.M., etapa județeană, 1977)

§ 3. Probleme cu puteri ale matricilor de ordin n

1. Pentru matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ să se calculeze $A^n, n \in \mathbb{N}^*$.

2. Să se arate că există polinoame α, β, γ de grade 2, 3, 4 încât pentru

matricea $A(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & \alpha(t) & \beta(t) \\ 0 & 1 & 4t & \gamma(t) \\ 0 & 0 & 1 & 6t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ să aibă loc $A(t) \cdot A(u) = A(t+u)$ și să se

exprime $[A(t)]^n$ pentru $n \in \mathbb{N}, n > 1$.

3. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} a & 0 & b-a & 0 \\ 0 & a & 0 & b-a \\ b-a & 0 & a & 0 \\ 0 & b-a & 0 & a \end{pmatrix}$. Să se calculeze A^n

pentru $n \in \mathbb{N}, n > 1$.

4. Să se calculeze $A^n (n \in \mathbb{N}^*)$ pentru matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Se consideră matricea $A \in M_{2n+1}(\mathbb{Z})$ de elemente a_{ij} încât: dacă $i-j$ este par, $a_{ij} = 0$ și dacă $i-j$ este impar, $a_{ij} = 1$. Să se calculeze A^n .

6. Fie $A \in M_n(\mathbb{Z})$ cu $a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{dacă } i = j, \\ 1 & \text{dacă } i \neq j. \end{cases}$ Să se calculeze A^n .

7. Dacă matricile $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ satisfac $A+B = I_n$ și $A \cdot B = O_n$ să se arate că $(pA + qB)^m = p^m A + q^m B$.

8. Dacă pentru $A \in M_n(\mathbb{C})$ există $a \in (-2, 2)$ încât $A^2 - a \cdot A + I_n = O_n$, să se arate că pentru orice $m \in \mathbb{N}$ există un unic $a_m \in (-2, 2)$ încât $A^{2m} - a_m \cdot A^m + I_n = O_n$.

§ 4. Probleme cu calcul de determinanți

1. Fie determinantul tridiagonal cu n linii și coloane

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ c & a & b & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & c & a & b & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & a & b & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & c & a \end{vmatrix}, n \geq 2.$$

Să se arate că $\Delta_n = a\Delta_{n-1} - bc\Delta_{n-2}$. Să se calculeze Δ_n în următoarele cazuri particulare:

- a) $a = 2, b = c = 1$; b) $a = 0, b = 1, c = -1$; c) $a = 3, b = 2, c = 1$;
d) $a = 5, b = 3, c = 2$; e) $a = 9, b = 5, c = 4$; f) $a = \alpha + \beta, b = \alpha\beta, c = 1$;
g) $a = -2\cos \alpha, b = c = 1$.

2. Să se calculeze

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

3. Să se calculeze determinantul de ordinul $n + 1$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2x & x & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ x & 2x & x & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 2x & x & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & x & 2x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & x & 2x \end{vmatrix}$$

4. Să se arate că

$$\begin{vmatrix} 1+x & -x & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1+\frac{x}{2} & -x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 1+\frac{x}{3} & -x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1+\frac{x}{n-1} & -x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{1}{n} & 1+\frac{x}{n} \end{vmatrix} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

5. Fie șirul $(\Delta_n)_{n \geq 2}$ definit prin

$$\begin{vmatrix} x+1 & \frac{1}{x} & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ x^2 & x+1 & \frac{1}{x} & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x^2 & x+1 & \frac{1}{x} & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x^2 & x+1 & \frac{1}{x} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x^2 & x+1 \end{vmatrix}$$

Să se studieze convergența șirului $(\Delta_n)_{n \geq 2}$.

6. Fie determinantul $\Delta_n = |a_{ik}|, i, k = 1, n, n \geq 2$ definit prin

$$a_{ik} = \begin{cases} 2 & \text{dacă } i = k \\ 3 & \text{dacă } i = k-1 \\ -1 & \text{dacă } i = k+1 \\ 0 & \text{dacă } i \notin \{k, k-1, k+1\} \end{cases}$$

Să se arate că $\Delta_n = 2\Delta_{n-1} + 3\Delta_{n-2}$ și să se calculeze Δ_n .

7. Să se arate că determinantul $\Delta_n = |a_{ik}|, i, k = 1, n, n \geq 2$, definit prin

$$a_{ik} = \begin{cases} 1+x^2 & i = k \\ x & i = k-1 \\ x & i = k+1 \\ 0 & i \notin \{k-1, k, k+1\} \end{cases}$$

verifică relația de recurență $\Delta_n - \Delta_{n-1} = x^2(\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2})$.

8. Fie determinantul de ordin $n + 1$

$$\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & x \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & \dots & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix}$$

Să se arate că $\Delta_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$.

9. Fie determinantul de ordin $2n$. Să se determine o relație de recurență și să se determine Δ_n , dacă

$$\Delta_{2n} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & \dots & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & b & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b & 0 & \dots & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

10. Fiind date numere reale nenule $a_1, a_2, \dots, a_n$ se formează cu acestea un determinant Vandermonde V_n de ordinul n în modul următor: pe prima linie apare de n ori cifra 1 (corespunzător puterilor 0 ale numerelor date); pe linia a 2-a se scriu numerele la puterea 1; ...; pe linia i (inclusiv $i = n$) se scriu în ordine puterile $i - 1$ ale numerelor date. Să se demonstreze formula $V_n = \prod_{i>j} (a_i - a_j)$.

§ 5. Determinări de șiruri

1. Să se determine șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ de numere reale strict pozitive care verifică relația de recurență $a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + \dots + a_n^3 = (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n)^2, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.

(O.M. etapa județeană cl. a X-a, 1977)

2. Să se determine șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ de numere reale strict pozitive ce satisface relația de recurență $\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{a_n}{a_{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ unde $a_4 = 4$.

(O.M. etapa finală cl. a X-a, 1983)

3. Să se găsească termenul general al șirului $(a_n)_{n \geq 0}$ definit prin relația $a_0 = a_1 = 1, \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k} = 2^n a_n, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. (O.M. etapa jud. cl. a X-a, 1989)

4. Să se determine șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ de numere reale strict pozitive care verifică relația de recurență $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \frac{(a_1 + a_n)a_n}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

5. Să se determine șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ de numere reale strict pozitive care verifică relația de recurență $a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3 = \left[\frac{(a_1 + a_n)a_n}{2} \right]^2, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

6. Să se determine șirul $(a_n)_{n \geq 0}$ de numere reale strict pozitive pentru care

$$\left(1 - \frac{1}{a_1^2}\right) \left(1 - \frac{1}{a_2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{a_3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{a_n^2}\right) = \frac{n+2}{2n+2}, \forall n \geq 1.$$

7. Să se determine șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ de numere naturale strict pozitive și strict crescător ce satisface relația $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \geq \frac{a_n(1+a_n)}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

(O.M. etapa județeană, Iași, 1995)

8. Notând cu F_k termenul k din șirul lui Fibonacci

$$(F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, F_0 = F_1 = 1)$$

să se determine șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ce satisface $x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 3$ și, pentru orice

$n \in \mathbb{N}$, relația de recurență $(R_n) \sum_{k=0}^n F_k x_{n-k} = F_{n+4} - x_{n+3}$. (D.B.)

9. Să se determine șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ ce satisface condițiile inițiale $x_0 = 1, x_1 = 2$ și, pentru $n \in \mathbb{N}^*$, relația de recurență $(R_n) \sum_{k=0}^n k \cdot x_{n-k} = \frac{n(n+1)}{6} x_{n+1}$. (D.B.)

§ 6. Caracterizări ale progresiilor

1. Să se arate că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este o progresie aritmetică dacă și numai dacă $2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, unde a_1, a_2 sunt numere reale date.

2. Să se arate că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este o progresie aritmetică dacă și numai dacă

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3.$$

3. Să se arate că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$, cu $a_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$, este o progresie aritmetică dacă și numai dacă $\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} a_n} = \frac{n-1}{a_1 a_n}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3$.

4. Să se arate că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este o progresie aritmetică dacă și numai dacă $a_1 + 2a_2 + 2a_3 + \dots + 2a_{n-1} + a_n = (a_1 + a_n)(n-1), \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3$.

5. Fie șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ un șir de numere reale nenule. Să se arate că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ formează o progresie aritmetică dacă și numai dacă pentru $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3$,

$$\frac{1}{a_1 a_n} + \frac{1}{a_2 a_{n-1}} + \frac{1}{a_3 a_{n-2}} + \dots + \frac{1}{a_n a_1} = \frac{2}{a_1 + a_n} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right).$$

6. Să se arate că șirul $(a_n)_{n \geq 1}, a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ este o progresie aritmetică dacă și numai dacă

$$\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}}, n \in \mathbb{N}, n \geq 3.$$

7. Să se arate că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ formează o progresie aritmetică dacă și numai dacă $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \frac{a_k + a_{n-k+1}}{2} \cdot n, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3, \forall k \in \mathbb{N}, k < n$.

8. Să se arate că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ de numere reale strict pozitive este o progresie geometrică dacă și numai dacă $a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

9. Să se arate că șirul de numere reale nenule $(a_n)_{n \geq 1}$ este o progresie geometrică dacă și numai dacă există $q \neq 1$ încât $a_2 = q \cdot a_1$ și, pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ are loc $(P_n) a_1 + a_2 + \dots + a_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$.

10. Să se arate că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ de numere reale strict pozitive este o progresie geometrică dacă și numai dacă $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ are loc

$$(Q_n) \quad a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = \sqrt{(a_1 a_n)^n}.$$

11. Să se arate că șirul de numere reale nenule $(a_n)_{n \geq 1}$ formează o progresie geometrică dacă și numai dacă pentru orice $n \in \mathbb{N}, n > 3$ are loc

$$(L_n) \quad (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{n-1}^2)(a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2) = (a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_{n-1} a_n)^2.$$

12. Să se arate că șirul de numere reale nenule $(a_n)_{n \geq 1}$ formează o progresie geometrică dacă și numai dacă pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ are loc egalitatea

$$(M_n) \quad \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1 a_n} (a_1 + a_2 + \dots + a_n).$$

13. Să se arate că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ formează o progresie aritmetică dacă și numai dacă pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ are loc egalitatea

$$(A_n) \quad (n+1)[a_1 + C_n^1 a_2 + C_n^2 a_3 + \dots + C_n^n a_{n+1}] = 2^n (a_1 + a_2 + \dots + a_{n+1}).$$

14. Să se arate că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este o progresie aritmetică dacă și numai dacă pentru orice $n \in \mathbb{N}, n > 2$ are loc $(B_n) \quad a_1 - a_2 C_n^1 + a_3 C_n^2 - \dots + (-1)^n a_{n+1} C_n^n = 0.$

CAPITOLUL III

APLICAȚII ÎN GEOMETRIE ȘI COMBINATORICĂ

§ 1. Aplicații în geometrie

Ne propunem aici să rezolvăm câteva probleme de geometrie combinatorică în care apar șiruri recurente.

G.1. Care este numărul de regiuni în care este împărțită o dreaptă prin n puncte distincte?

Soluție. Fie p_n acest număr. Desigur $(I_1) \quad p_1 = 2.$

Pentru a calcula p_{n+1} fie cele p_n regiuni în care este împărțită dreapta de primele n puncte. Cel de al $n+1$ -lea va fi situat în una dintre aceste p_n regiuni pe care o împarte în două. Deci $(R_1) \quad p_{n+1} = p_n + 1.$

Din (I_1) și (R_1) urmează imediat $p_{n+1} = n + 1.$

G.2. Care este numărul maxim d_n în care n drepte pot împărți planul?

Soluție ([7] pag. 130). Avem desigur $(I_1) \quad d_1 = 2.$

Este clar că n drepte vor împărți planul în cel mai mare număr de părți, dacă toate aceste drepte se intersectează (adică nici o pereche nu este paralelă) și dacă nici un grup de trei dintre ele nu sunt concurente. Deci rămâne să determinăm în câte părți este împărțit planul prin n drepte neparalele două câte două și astfel încât nici un grup de trei dintre ele să nu fie concurente. S-ar putea crede că deși se respectă toate aceste condiții, numărul părților încă mai depinde de configurația dreptelor. Însă, din soluția noastră va rezulta că acest număr este determinat în mod unic de valoarea lui n și deci nu depinde de configurația dreptelor.

Presupunem că au fost duse în plan k drepte; ducem dreapta a $(k+1)$ -a și vom arăta cu cât a crescut numărul de părți în care dreptele împart planul. Dreapta a $(k+1)$ -a se intersectează cu cele k drepte în k puncte, care o împart în $k+1$ părți. Deci dreapta a $(k+1)$ -a va tăia exact $k+1$ părți din toate părțile existente ale planului. Deoarece fiecare din aceste părți este împărțită în două, după ce am dus cea de-a $(k+1)$ -a dreaptă, numărul total de părți a crescut cu $k+1 = p_k.$

Avem deci relația de recurență $(R_2) \quad d_{k+1} = d_k + (k+1).$

Din (I_2) și (R_2) rezultă rapid $d_n = \frac{1}{2}(n^2 + n + 2).$

G.3. Care este numărul maxim s_n în care n plane pot împărți spațiul tridimensional?

Soluție ([7] pag. 131). Raționând ca în problema precedentă vom avea

$$(I_3) \quad s_1 = 2 \text{ și } (R_3) \quad s_{n+1} = s_n + d_n = s_n + \frac{n^2 + n + 2}{2}.$$

Pentru determinarea șirului recursiv s_n recomandăm aici căutarea coeficienților A, B, C, D încât $s_n = An^3 + Bn^2 + Cn + D$ să satisfacă (I_3) și $(R_3).$

Un calcul simplu asigură $s_n = \frac{1}{6}(n^3 + 5n + 6) = \frac{1}{6}(n+1)(n^2 - n + 6)$.

Observație. Raționamentele de mai sus pun în evidență o problemă mai generală cu o soluție ce obligă la o dublă recurență. Care este numărul maxim r_n^m în care n hiperplane împart spațiul de dimensiune m ? Vor apare aici condiții inițiale $r_1^m = 2 \quad \forall m \geq 1, r_n^1 = p_n, \quad \forall n \geq 1$ la care se pot adăuga $r_n^2 = d_n, r_n^3 = s_n$ și recurența după n $(R^m) \quad r_{n+1}^m = r_n^m + r_n^{m-1}$.

Apreciem că interesul determinării lui r_n^m ca polinom de grad m în variabila n nu compensează traversarea efectivă a dificultăților algebrice.

G.4. Care este numărul c_n în care poate fi împărțit planul prin n cercuri?

Soluție ([7] pag. 131). Avem desigur $(I_4) \quad c_1 = 2$.

Cele n cercuri vor împărți planul în cel mai mare număr de părți, dacă toate cercurile se intersectează (adică nici o pereche nu sunt tangente și nici unul nu este situat în întregime în interiorul sau în exteriorul altuia) și nici un grup de trei astfel de cercuri nu se intersectează în același punct.

Raționând ca în problema G.2., vom arăta că cercul al $(k+1)$ -lea mărește numărul de părți ale planului cu $2k$ [al $(k+1)$ -lea cerc se intersectează cu cele k cercuri duse mai înainte în $2k$ puncte; aceste $2k$ puncte îl împart în $2k$ părți]. Avem deci relația de recurență $(R_4) \quad c_{k+1} = c_k + 2k$.

Condițiile (I_4) și (R_4) determină $c_n = n^2 - n + 2$.

G.5. Care este numărul maxim e_n în care poate fi împărțită suprafața $\mathcal{S}$ a unei sfere de n cercuri de pe această sferă?

Soluție. Raționamentul din problema precedentă se aplică fără modificare și conchidem $e_n = c_n = n^2 - n + 2$.

De altfel alegând pe $\mathcal{S}$ un punct P nesituat pe niciunul dintre cele n cercuri, printr-o inversiune de pol P transformăm $\mathcal{S}$ într-un plan π și G.5. revine la G.4.

G.6. Care este numărul maxim u_n în care pot împărți n sfere spațiul tridimensional?

Soluție. Găsim ușor: $(I_6) \quad u_1 = 2$ și $(R_6) \quad u_{n+1} = u_n + e_n = u_n + (n^2 - n + 2)$.

Urmează rapid $u_n = \frac{n}{3}(n^2 - 3n + 8)$.

G.7. Știind că poligonul convex cu n vârfuri nu are nici un grup de trei diagonale concurente, să se determine numărul a_n de puncte de intersecție al diagonalelor sale. (Prin diagonală se înțelege aici un segment deschis).

Soluție ([7] pag. 133). *Prima rezolvare.* Să considerăm diagonală A_1A_k a poligonului $A_1A_2A_3 \dots A_n$. De o parte și de alta a acestei diagonale se găsesc respectiv $k-2$ vârfuri ale poligonului $(A_2, A_3, A_4, \dots, A_{k-1})$ și $n-k$ vârfuri (vârfurile $A_{k+1}, A_{k+2}, \dots, A_n$). Diagonala A_1A_k se va intersecta cu toate diagonalele care unesc unul oarecare dintre cele $k-2$ vârfuri din primul grup și oricare dintre cele $n-k$ vârfuri din al doilea grup, adică se intersectează în total cu $(k-2)(n-k)$ diagonale. Deci, toate diagonalele care trec prin vârful A_1 (diagonalele $A_1A_3, A_1A_4, \dots, A_1A_{n-1}$) se vor intersecta cu celelalte diagonale în

$$x_n = 1 \cdot (n-3) + 2 \cdot (n-4) + \dots + (n-3) \cdot 1 \text{ puncte.}$$

Preferăm pentru calcul să observăm $x_{n+1} - x_n = [1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + \dots + (n-3) \cdot 1] + (n-2) \cdot 1 = \frac{(n-3)(n-2)}{2} + (n-2) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$. Contând și pe „condiția inițială” $x_4 = 1$ se deduce ușor $x_n = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}$.

Deci diagonalele care trec prin vârful A_1 se vor intersecta cu celelalte diagonale în $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}$ puncte. Într-un același număr de puncte se vor intersecta cu celelalte diagonale și diagonalele care trec prin oricare alt vârf al poligonului. Dar înmulțind $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}$ cu numărul de vârfuri ale poligonului (egal cu n), fiecare punct de intersecție va fi considerat de patru ori (în fiecare din aceste puncte se intersectează câte două diagonale, fiecare din ele având două extremități în două vârfuri). În definitiv, numărul căutat de puncte de intersecție este egal cu $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6} \cdot \frac{n}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$.

Rezolvarea a doua. Această problemă poate fi rezolvată mult mai simplu aplicând formula pentru numărul combinațiilor. Într-adevăr, vom considera un punct de intersecție al diagonalelor. Fiecare punct de intersecție aparține la două diagonale.

Punctul B de intersecție a diagonalelor A_1A_3 și A_2A_4 îi corespunde un grup de patru vârfuri A_1, A_2, A_3 și A_4 ale poligonului considerat (punctul B este punctul de intersecție a diagonalelor patrulaterului $A_1A_2A_3A_4$, fig. 1). Reciproc, fiecărui grup de patru vârfuri A_1, A_2, A_3 și A_4 ale poligonului îi corespunde un singur punct de intersecție a diagonalelor patrulaterului $A_1A_2A_3A_4$. De aici rezultă că numărul punctelor de intersecție a diagonalelor poligonului convex este egal cu numărul combinațiilor de n elemente luate câte 4, adică este egal cu $C_n^4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$.

G.8. Care este numărul f_n de părți în care este împărțit interiorul unui poligon convex cu n laturi de către diagonalele sale?

Soluție ([7] pag. 135). *Prima rezolvare.* Vom nota cu f_n numărul căutat pentru poligonul convex cu n laturi. Vom deduce relația dintre f_n și f_{n+1} . Se va considera un poligon convex oarecare cu $n+1$ laturi; vom nota toate vârfurile sale luate într-o ordine anumită cu $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, A_{n+1}$ (fig. 2) Se vor duce toate diagonalele sale; acestea vor fi, în același timp, și diagonalele poligonului cu $n+1$ laturi. Pentru a obține toate diagonalele poligonului cu $n+1$ laturi trebuie să mai unim vârful al

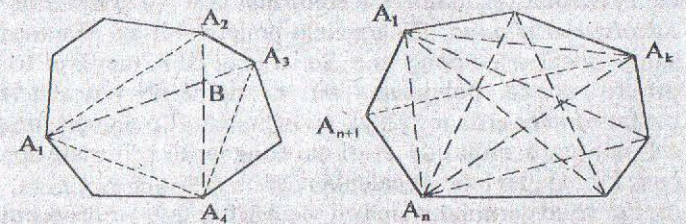


Fig. 2

$(n+1)$ -lea cu celelalte vârfuri prin $n-2$ diagonale.

Se va considera diagonală care unește vârful al $(n+1)$ -lea cu al k -lea ($k=2, 3, 4, \dots, n-1$). De o parte a ei se vor afla $k-1$ vârfuri (vârfurile $A_1, A_2, \dots, A_{k-1}$), iar de cealaltă parte $n-k$ vârfuri (vârfurile $A_{k+1}, A_{k+2}, \dots, A_n$). Deci, diagonală $A_{n+1}A_k$ va intersecta $(k-1) \cdot (n-k)$ diagonale ale poligonului cu $n+1$ laturi. Punctele de intersecție vor împărți această diagonală în $(k-1)(n-k)+1$ părți. Deci ea va mai adăuga în poligonul cu $n+1$ laturi încă $(k-1)(n-k)+1$ părți. Diagonalele care nu trec prin A_{n+1} împart poligonul cu $n+1$ laturi în f_n+1 părți [f_n părți ale poligonului $A_1A_2 \dots A_n$ și partea a (f_n+1) -a, care este triunghiul $A_{n+1}A_1A_n$]. După ce au fost duse diagonalele din A_{n+1} la aceste f_n+1 părți ale poligonului cu $n+1$ laturi, se vor mai adăuga

$$\sum_{k=2}^{n-1} [(k-1)(n-k)+1] = \left\{ \sum_{k=2}^{n-1} [-k^2 + (n+1)k - n] \right\} + n - 2 =$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)}{6} + (n-2), \text{ deci } (R_8) f_{n+1} = f_n + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} + (n-1).$$

Drept condiție inițială putem lua cazul triunghiului $(I_8) f_3 = 1$.

Cu tehnica uzuală de determinare a șirurilor recurente stabilim

$$f_n = \frac{1}{24} (n-1)(n-2)(n^2 - 3n + 12).$$

(În particular rezultatul este confirmat la $n=4$ și $n=5$: $f_4=4$, $f_5=11$).

Rezolvarea a doua. Diagonalele poligonului cu n laturi îl împart în părți care sunt evident toate poligoane. Se va nota cu r_3 numărul triunghiurilor care se află printre aceste poligoane, cu r_4 numărul patrulaterelor, cu r_5 numărul pentagoanelor etc., în sfârșit, cu r_m numărul poligoanelor cu m laturi (aici m este cel mai mare număr de laturi ale poligoanelor formate de diagonalele poligonului cu n laturi). Trebuie să calculăm suma $f_n = r_3 + r_4 + r_5 + \dots + r_m$.

Se va determina numărul de vârfuri ale tuturor poligoanelor în care este împărțit poligonul cu n laturi prin diagonalele sale. Pe de o parte, această sumă este evident egală cu $3r_3 + 4r_4 + 5r_5 + \dots + mr_m$.

Pe de altă parte, fiecare dintre punctele de intersecție ale diagonalelor poligonului este vârful a patru poligoane alăturate în acest punct, iar fiecare dintre vârfurile poligonului cu n laturi este vârful a $n-2$ poligoane care se alipesc în acest vârf. Însă, deoarece numărul punctelor de intersecție ale diagonalelor poligonului este egal cu $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$ iar numărul vârfurilor poligonului este egal cu n , suma numărului de vârfuri ale tuturor poligoanelor, în care este împărțit poligonul cu n laturi de diagonalele sale, este egală cu $4 \cdot \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} + (n-2)n = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{6} + (n-2)n$.

În acest mod, se obține

$$(1) \quad 3r_3 + 4r_4 + 5r_5 + \dots + mr_m = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{6} + (n-2)n.$$

Se determină acum suma unghiurilor tuturor poligoanelor în care este împărțit poligonul cu n laturi. Deoarece suma unghiurilor poligonului cu k laturi este

egală cu $(k-2) \cdot 180^\circ$, suma căutată este egală cu

$$[r_3 + 2r_4 + 3r_5 + \dots + (m-2)r_m] \cdot 180^\circ.$$

Această sumă este egală cu suma unghiurilor poligonului, $(n-2) \cdot 180^\circ$ la care se adaugă (vezi problema G.7.) $a_n \cdot 360^\circ = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} \cdot 360^\circ$, unghiurile cu vârfurile în interiorul patrulaterului. Deducem

$$(2) \quad r_3 + 2r_4 + \dots + (m-2)r_m = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{12} + 12.$$

Scăzând din această egalitate (1) se ajunge rapid la

$$f_n = r_3 + r_4 + \dots + r_m = \frac{(n-1)(n-2)(n^2 - 3n + 12)}{24}.$$

G.9. Un poligon convex cu n laturi poate fi împărțit printr-un număr d_n de diagonale nesecante ale sale în t_n triunghiuri. Să se arate că d_n și t_n nu depind de modul de împărțire și să se determine d_n și t_n . (Pe figura 3 apar două „triangulări” ale unui același poligon).

Soluție ([7] pag. 142). Se presupune că un poligon cu n laturi este împărțit de diagonalele care nu se intersectează în interiorul său în k triunghiuri. Atunci suma tuturor unghiurilor interioare ale tuturor acestor triunghiuri este egală cu $180^\circ k$.

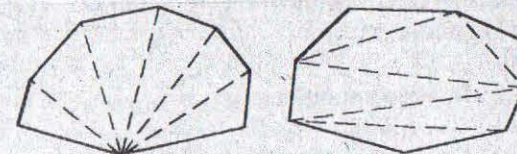


Fig. 3

Se va calcula această sumă pe altă cale. Deoarece diagonalele considerate nu se intersectează în interiorul poligonului, toate vârfurile triunghiurilor se află în vârfurile poligonului. Suma unghiurilor pentru toate vârfurile triunghiurilor de diviziune, alăturate într-un vârf dat al poligonului, este egală cu unghiul interior al poligonului din acest vârf. Deci, suma tuturor unghiurilor interioare ale tuturor triunghiurilor este egală cu suma tuturor unghiurilor interioare ale poligonului, adică este egală cu $(n-2) \cdot 180^\circ$. De aici rezultă

$$k \cdot 180^\circ = (n-2) \cdot 180^\circ, \text{ adică } t_n = k = n-2.$$

Astfel, numărul triunghiurilor în care este împărțit poligonul de către diagonale este egal cu $n-2$ și nu depinde de modul de diviziune.

Se va calcula numărul l al diagonalelor care fac parte dintr-o astfel de diviziune. Fiecare triunghi are trei laturi, deci numărul total al laturilor tuturor triunghiurilor este egal cu $3(n-2)$. Dar fiecare diagonală a poligonului este latură a două triunghiuri, iar fiecare latură a poligonului este latură a unui singur triunghi. Deci $3(n-2) = 2l + n$, $3n-6-n=2l$, $d_n = l = (2n-6)/2 = n-3$.

Astfel, numărul diagonalelor este egal cu $n-3$ și nu depinde de modul de diviziune.

Rezolvarea recursivă a acestei probleme nu este mai dificilă. Pentru condiții inițiale, în cazul triunghiului avem $(I_9) d_3 = 0$, $t_3 = 0$.

La patrulater, $n=4$, se observă rapid independența de alegerea diagonalei.

Pentru un poligon convex $A_1A_2 \dots A_n$ cu $n \geq 4$ laturi, după trasarea unei

diagonale A_1A_k (cu $2 < k < n$) avem de continuat triangularea celor două poligoane „nou tăiate” având k și respectiv $(n+1-k)$ laturi. Deducem

$$(R_9) \quad \begin{cases} d_n = 1 + d_{n-k} + d_{n+1-k} \\ t_n = d_{n-k} + d_{n+1-k}, \text{ etc.} \end{cases}$$

G.10. (Problema lui Euler) În câte moduri poate fi împărțit polygonul convex cu n laturi în triunghiuri, prin diagonale care nu se intersectează?

Soluție ([7] pag. 142). Se va nota cu T_n numărul de moduri în care poate fi împărțit în triunghiuri polygonul cu n laturi prin diagonalele care nu se intersectează în interiorul său. Vom arăta că, dacă sunt cunoscute numerele $T_1, T_2, \dots, T_n$, se poate determina și numărul T_{n+1} .

Se va fixa o latură oarecare a polygonului cu $n+1$ laturi, de exemplu A_1A_2 . În acest caz, sunt posibile următoarele moduri de împărțire în triunghiuri a polygonului cu $n+1$ laturi.

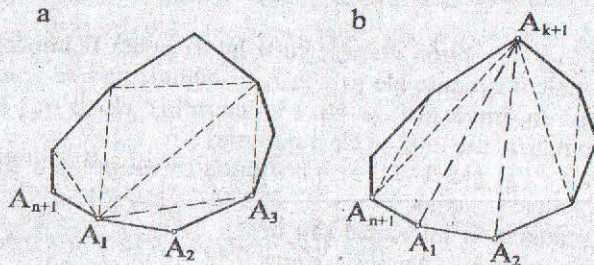


Fig. 4

1° În descompunere intră $\Delta A_1A_2A_3$ (fig. 4a).

Deoarece polygonul cu $n+1$ laturi este convex, diagonala A_1A_3 separă din el un poligon cu n laturi convex, care poate fi descompus în triunghiuri în T_n moduri. Deci, există T_n moduri de diviziune a polygonului cu $n+1$ laturi în triunghiuri, în care intră $\Delta A_1A_2A_3$.

2° La fel există T_n moduri de descompunere, în care în descompunere intră $\Delta A_1A_2A_{n+1}$.

3° În descompunere intră $\Delta A_1A_2A_{k+1}$, unde $2 < k < n$ (fig. 4b).

Se va calcula numărul descompunerilor existente atunci când se fixează k .

Diagonala $A_{k+1}A_2$ separă din polygonul cu $n+1$ laturi un poligon cu k laturi $A_2A_3 \dots A_{k+1}$, iar diagonala A_1A_{k+1} va separa din polygonul cu $n+1$ laturi un poligon cu $n-k+2$ laturi $A_{k+1}A_{k+2} \dots A_nA_{n+1}A_1$. Polygonul cu k laturi poate fi descompus în triunghiuri în T_k moduri, iar polygonul cu $n+2-k$ laturi în T_{n+2-k} moduri. Deoarece putem în descompunerea polygonului cu $n+1$ laturi să combinăm o descompunere oarecare a polygonului cu k laturi cu o descompunere oarecare a polygonului cu $n+2-k$ laturi, numărul tuturor descompunerilor polygonului cu $n+1$ laturi în care intră $\Delta A_1A_2A_{k+1}$ este egal cu $T_k T_{n+2-k}$.

Dând lui k diferite valori $2, 3, 4, \dots, n$, vom obține relația

$$(R_{10}) \quad T_{n+1} = 2T_n + T_3T_{n-1} + T_4T_{n-2} + \dots + T_{n-2}T_4 + T_{n-1}T_3.$$

Drept condiții inițiale vom lua $(I_0) T_3 = 1$ și $T_4 = 2$.

Folosind numai formula, este greu de stabilit cu ce este egal numărul T_n în cazul general. De aceea, vom deduce, acum, încă o relație care permite să determinăm pe T_n , cunoscând pe $T_3, T_4, \dots, T_{n-1}$. Folosind apoi ambele relații obținute, vom determina fără greutate formula pentru T_n .

Se va calcula numărul descompunerilor polygonului convex $A_1A_2A_3 \dots A_n$, din care face parte diagonala A_1A_k . Această diagonală împarte polygonul $A_1A_2 \dots A_k$ și polygonul cu $n-k+2$ laturi $A_kA_{k+1} \dots A_nA_1$. Deoarece primul dintre aceste poligoane poate fi împărțit în triunghiuri în T_k moduri, iar al doilea în T_{n-k+2} moduri, numărul descompunerilor polygonului, din care face parte diagonala A_1A_k , este egal cu $T_k T_{n-k+2}$.

Numărul descompunerilor din care face parte o anumită diagonală poate fi însemnat după toate diagonalele polygonului în modul următor: mai întâi vom forma suma din $n-2$ termeni, corespunzătoare celor $n-2$ diagonale care trec prin vârful A_1 . Apoi vom înmulți această sumă cu numărul n al vârfurilor și produsul obținut îl vom împărți la 2 (deoarece fiecare diagonală trece prin două vârfuri).

Suma corespunzătoare diagonalelor care trec prin vârful A_1 este evident egală cu $T_3T_{n-1} + T_4T_{n-2} + \dots + T_{n-2}T_4 + T_{n-1}T_3$. După înmulțirea acestei expresii cu

$$n/2 \text{ vom obține } \frac{n}{2}(T_3T_{n-1} + T_4T_{n-2} + \dots + T_{n-2}T_4 + T_{n-1}T_3).$$

Prin însumarea după fiecare diagonală a numărului de descompuneri din care face parte diagonala dată, fiecare descompunere va fi, evident, considerată de atâtea ori câte diagonale fac parte din această descompunere. Conform problemei G.9., numărul diagonalelor care fac parte din fiecare descompunere este egal cu

$$n-3. \text{ Deci } (R'_{10}) \quad (n-3)T_n = \frac{n}{2}(T_3T_{n-1} + T_4T_{n-2} + \dots + T_{n-2}T_4 + T_{n-1}T_3).$$

Preluând $\left(\sum_{k=3}^{n-1} T_k T_{n+2-k} \right)$ din (R_{10}) și înlocuind în (R'_{10}) deducem

$$\frac{n}{2}(T_{n+1} - 2T_n) = (n-3) \cdot T_n, \text{ adică } (*) \quad T_{n+1} = \frac{2(2n-3)}{n} T_n.$$

(Prin logaritmare $(*)$ devine o relație de recurență liniară de ordin 1). Înlocuind în $(*)$ $n+1$ prin m și transcriind-o succesiv pentru $m = n, n+1, \dots, 4$ după înmulțirea acestor egalități și simplificarea factorilor $T_{n-1}, T_{n-2}, \dots, T_4$ se obține

$$T_n = \frac{(2n-5)!!}{(n-1)!} \cdot 2^{n-2}. \text{ [Aici !! este „semifactorial” cu semnificația}$$

$$(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n) \text{ și } (2n+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)].$$

Observație. Dacă se dorește evitarea semifactorialului, formula de mai sus poate

$$\text{fi prezentată și sub forma } T_n = \frac{1}{2n-3} \cdot \frac{C_{2n-2}^{n-2}}{C_{2n-3}^{n-2}}.$$

G.11. Pe un cerc sunt date $2n$ puncte distincte. În câte moduri pot fi unite două câte două prin n coarde disjuncte?

Soluție ([7] pag. 146). Vom nota cu Φ_n numărul de moduri în care $2n$ puncte oarecare de pe cerc pot fi unite două câte două prin n coarde care nu se intersectează în interiorul cercului.

Vom arăta că, cunoscând pe $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{n-1}$, putem determina pe Φ_n .

Să notăm cele $2n$ puncte în ordinea succesiunii lor pe cerc cu $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{2n}$. Punctul A_1 poate fi unit cu punctele $A_2, A_4, A_6, \dots, A_{2n}$; altfel, de ambele

părți ale coardei care trece prin punctul A_1 s-ar găsi câte un număr impar de puncte și deci, unind punctele două câte două, coarda care trece prin A_1 ar trebui să fie intersectată de cel puțin o coardă.

Să calculăm numărul modurilor diferite de unire a punctelor, în care A_1 este unit cu A_{2k} . În acest caz, de o parte a coardei $A_1 A_{2k}$ se află $2(k-1)$ puncte (punctele $A_2, A_3, \dots, A_{2k-1}$) iar de cealaltă $2(n-k)$ puncte (punctele $A_{2k+1}, A_{2k+2}, \dots, A_{2n}$). Evident că primele $2(k-1)$ puncte pot fi unite două câte două în Φ_{k-1} moduri, iar celelalte $2(n-k)$ puncte în Φ_{n-k} moduri. Toate modurile posibile, care verifică condițiile problemei, de unire două câte două a tuturor $2n$ puncte și în care A_1 este unit cu A_{2k} , le vom obține combinând toate cele Φ_{k-1} moduri diferite de unire a punctelor $A_2, A_3, \dots, A_{2k-1}$ cu toate cele Φ_{n-k} moduri diferite pentru punctele $A_{2k+1}, A_{2k+2}, \dots, A_{2n}$; astfel numărul acestor moduri de unire este egal cu $\Phi_{k-1} \Phi_{n-k}$. Considerând, acum, că punctul A_1 poate fi unit cu punctele $A_2, A_4, A_6, \dots, A_{2n-2}, A_{2n}$, obținem formula generală

$$(R_{11}) \quad \Phi_n = \Phi_{n-1} + \Phi_1 \Phi_{n-2} + \Phi_2 \Phi_{n-3} + \dots + \Phi_{n-2} \Phi_1 + \Phi_{n-1}.$$

Drept condiție inițială vom lua evidentă $(I_{11}) \Phi_1 = 1$.

Este ușor de observat acum că Φ_n satisface aceleași condiții (inițiale și de recurență) ca și T_{n+2} din problema G.10. deci $\Phi_n = T_{n+2} = \frac{1}{2n+1} C_{2n+1}^n$.

În continuare vom prezenta un set de probleme de *dispunere* și de *pavare*. Vom începe cu precizarea terminologiei acestor probleme.

Vom considera un dreptunghi D cu lungimile laturilor numere naturale m, n subînțelegând automat o divizare a lui D într-o familie P de $m \times n$ pătrate cu latura cât unitatea. Vom mai considera o familie F de „dale“, dreptunghiuri d congruente între ele, în număr suficient pentru fiecare problemă. Aici dalele vor fi dreptunghiuri 1×2 , dar problemele pot fi reluate și cu dale „mai mari“.

O *dispunere* a unei dale $d \in F$ în dreptunghiul D va putea acoperi doar două pătrate din P . Dacă sunt de dispus mai multe dale nu se admit suprapuneri, deci un pătrat din P va putea fi acoperit de cel mult o dală din F . Când se va cere ca fiecare pătrat din P să fie acoperit, vom vorbi despre o *pavare* a lui D (cu elemente din F).

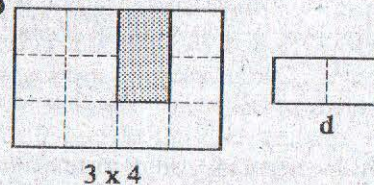


Fig. 5

G.12. Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ se consideră dreptunghiul D cu lungimile laturilor 1 și n . Care este numărul a_n de dispuneri admisibile, fără suprapuneri, de dale 1×2 în D ?

Soluție. Să considerăm o numerotare (de la 1 la n) a pătratelor P din D . Fie $a_{n,i}$ numărul acelor dispuneri de dale pentru care pătratul acoperit cu cel mai mare indice este cel cu indice i . Considerând și dispunerea „vidă“ va intra în discuție și $a_{n,1}$. Apare formula (1) $a_n = a_{n,n} + a_{n,n-1} + \dots + a_{n,1}$. Trecând n în $n+1$ vom avea

$$(2) a_{n+1} = a_{n+1,n+1} + a_{n+1,n} + \dots + a_{n+1,1}.$$

Printr-o corespondență biunivocă evidentă constatăm egalitățile $a_{n+1,i} = a_{n,i}$ și prin scăderea egalităților (1), (2) obținem $a_{n+1} = a_{n+1,n+1} + a_n$.

Dar $a_{n+1,n+1}$ este numeric egal cu numărul a_{n-1} al dispunerilor dalelor din F în dreptunghiul $1 \times (n-1)$, deci egalitatea precedentă devine (R_{12})

$$a_{n+1} = a_{n-1} + a_n.$$

Fig. 6

Este bine cunoscuta relație de recurență Fibonacci dar contextul definitoriu de aici ni se pare mult mai convingător decât cel clasic al „perechilor de iepuri nemuritori“.

Se observă și evidentele $a_1 = 1$ (doar dispunere vidă) și $a_2 = 2$ (cea vidă și acoperirea cu o dală) deci a_n coincide cu numărul lui Fibonacci

$$(3) \quad a_n = u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right]$$

Observația 1. Pentru o dispunere de dale din F în D putem asocia pătratelor din P cifra 0 sau 1 după cum pătratul este sau nu acoperit cu de o dală. Deci o dispunere admisibilă este dată de un număr în scriere binară cu cel mult n cifre și putem enunța rezultatul de mai sus prin

Teorema 1. Numărul numerelor ce se scriu în baza 2 cu cel mult n cifre și în care cifra 1 apare doar în succesiuni de lungimi pare este egal cu numărul lui Fibonacci u_n .

Vom folosi și în continuare acest sistem de „codificare binară“ a dispunerilor.

G.13. Câte din modalitățile a_n din problema G.12. pot fi considerate distincte după „răsturnarea“ dreptunghiului D ?

Soluție. Să punem problema determinării numărului s_n de dispuneri admisibile pentru G.12. ce au proprietatea suplimentară de a fi simetrice.

Distingem din cele $s_n : t_n$ în care primul și ultimul pătrat sunt acoperite și u_n în care primul și ultimul pătrat nu sunt acoperite.

Evident, $t_n = s_{n-4}$, $u_n = s_{n-2}$ și apare relația de recurență $(R_{13}) \quad s_n = s_{n-2} + s_{n-4}$. Pentru $n = 2k$ primii termeni sunt $s_2 = 2$ (adică 00 și 11) și $s_4 = 3$ (adică 0000, 0110 și 1111) și urmează $s_{2k} = u_{k+1}$. Pentru $n = 2k+1$ primii termeni sunt $s_3 = 1$ și $s_5 = 2$ (adică 00000 și 11011), deci $s_{2k+1} = u_k$.

Acum numărul b_n al dispunerilor distincte față de o simetrie se obține numărând cele simetrice și, doar o singură dată (în loc de două) pe cele asimetrice (în număr de $a_n - s_n$). Formula $b_n = s_n + \frac{1}{2}(a_n - s_n) = \frac{1}{2}(a_n + s_n)$ se

$$\text{explicitează în (4)} \quad b_{2k} = \frac{1}{2}(u_{2k} + u_{k+1}), \quad b_{2k+1} = \frac{1}{2}(u_{2k+1} + u_k).$$

Observația 2. Aici contextul ne asigură că cele două paranteze din membrii secunzi din (6) sunt numere pare. Demonstrația acestui fapt prin inducție constituie un exercițiu atrăgător.

G.14. Care este numărul p_n al pavărilor distincte cu dale 1×2 ale

dreptunghiului D având dimensiunile 2 și n ?

G.15. Se cere numărul q_n al pavărilor din **G.14.** ce rămân distincte după „răsturnări” ale lui D .

Soluția problemelor G.14. și G.15. este aici imediată. Considerând D așezat cu laturile de lungime n orizontal ne fixăm atenția asupra dalelor așezate orizontal pe prima linie; pe cea de a doua linie se vor așeza identic. (Dacă ar apare o „desincronizare” între cele două linii, un număr impar de pătrate situat de o parte a acestei desincronizări ar fi acoperibil cu plăcuțe de arii pare, absurd.) Deci un pavaj al lui $2 \times n$ este perfect determinat de o dispunere admisibilă de dale 1×2 într-un dreptunghi $1 \times n$.

Concluzia este imediată (5) $p_n = a_n = u_n$, $q_n = b_n$ (pentru $n \neq 2$) și $q_1 = 1$.

Observația 3. Enunțul pentru **G.14.-G.15.** utilizează termenul de „pavare”, mai puțin ambiguu comparativ cu cel de „dispunere admisibilă” din **G.12.** și **G.13.** Apreciem că și soluția directă pentru **G.14.-G.15.** este mai naturală.

G.16. Care este numărul f_n al pavărilor distincte cu dale 1×2 ale unui dreptunghi D cu dimensiunile $3 \times (2n)$?

Soluție. Punem în evidență dalele adiacente uneia dintre laturile de lungime 3 ale lui D furnizate de figura 7.

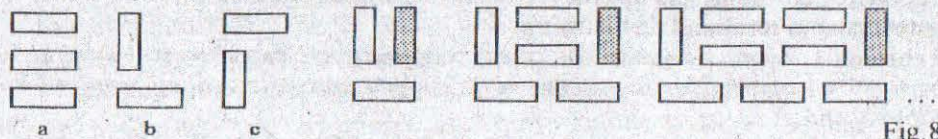


Fig. 8

Fig. 7 Notăm cu $f_{n,a}$, $f_{n,b}$ și $f_{n,c}$ pavajele lui D ce „încep” cu a , b respectiv c . Deducem (6) $f_n = f_{n,a} + f_{n,b} + f_{n,c}$ și $f_{n,a} = f_{n-1}$.

Pavajele ce încep cu b vor mai conține o primă dală verticală, tot în liniile 1 + 2 și pe coloanele 2, 4, 6 etc. (fig. 8)

Urmază $f_{n,b} = f_{n-1} + f_{n-2} + \dots + f_0$ și o formulă analogă pentru $f_{n,c}$. Acum (6) devine (R_{16}) $f_n = 3f_{n-1} + 2 \sum_{i=2}^n f_{n-i}$.

Transcriind (R_{16}) când n trece în $(n+1)$ prin scădere se obține formula de recurență (R'_{16}) $f_{n+1} = 4f_n - f_{n-1}$.

Ecuatia caracteristică asociată recurenței (R'_{16}) este $t^2 - 4t + 1 = 0$ cu rădăcinile $2 \pm \sqrt{3}$. Vor exista deci constante x, y încât (7) $f_n = x(2 + \sqrt{3})^n + y(2 - \sqrt{3})^n$.

Desigur $f_0 = 1$. Cele 3 pavaje pentru $n = 1$ sunt furnizate de figura 9. Alăturând oricare două dintre cele 3 = f_1 pavaje de la $n = 1$ se obțin 9 dintre cele 11 = f_2 pavaje pentru $n = 2$; ultimele două sunt prezentate de figura 10.

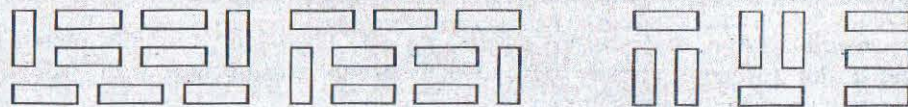


Fig. 9

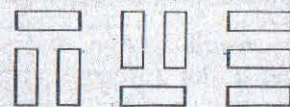


Fig. 10

Un calcul simplu asigură $x = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}$, $y = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}$ deci

$$(8) \quad f_n = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}(2+\sqrt{3})^n + \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}(2-\sqrt{3})^n.$$

(Formulele (R_{16}), (R'_{16}) și (7) sunt verificate și pentru $n = 2$ și pentru $f_3 = 41$)

Observația 4. Pentru un pavaj al dreptunghiului D ($3 \times 2n$) cu dale 1×2 coloanele lui D au zece aspecte distincte furnizate și notate de figura 11.



Fig. 11

Interpretând pavajul ca o succesiune ordonată a unor

astfel de coloane putem enunța următoarele axiome pentru o succesiune ordonată cu număr par de elemente din $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$.

A.1. Primul simbol poate fi a, c sau e .

A.2. Ultimul simbol poate fi b, d sau f .

A.3. Sunt admisibile următoarele perechi ordonate $ab, ba, bc, be, cd, ci, da, dc, de, dj, ef, eg, fa, fc, fe, gf, gh, hf, hg, ij, jd, ji$.

Putem reformula cele de mai sus alegând pentru simbolurile $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j$ valori din $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, cu singura condiție $0 \notin \{a, c, e\}$.

Teorema 2. Pentru orice n din $\mathbb{N}^*$ există exact f_n numere ce se scriu în baza 10 cu exact $2n$ cifre și îndeplinesc axiomele A.1, A.2, A.3.

Observația 5. Și referitor la **G.16.** se poate cere o renumărare de pavări în care să fie identificate pavările ce se obțin una din alta prin răsturnări ale lui D . Aici simetrice față de mediatoarele laturilor de lungimi variabile n sunt F_n pavări precizate prin

$$(9) \quad F_{2k} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}(2+\sqrt{3})^k + \frac{1-\sqrt{3}}{2}(2-\sqrt{3})^k,$$

$$F_{2k+1} = \frac{3\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}(2+\sqrt{3})^k + \frac{3\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}(2-\sqrt{3})^k.$$

G.17. Care este numărul x_n al pavărilor distincte cu dale 1×2 ale unui dreptunghi D de dimensiuni $4 \times n$?

Soluție. Vom distinge configurații de pavaj adiacente laturii „din stânga” a lui D precizate prin figura 12. Având în vedere aceste posibile „începuturi de pavări” „desfacem”;

$$(10) x_n = x_n^a + x_n^b + ax_n^c + x_n^d + x_n^e.$$

Desigur, $x_n^a = x_{n-1}$ și $x_n^e = x_{n-2}$.

Continuarea lui b până la o primă dală verticală (ca în figura 13) ne asigură că

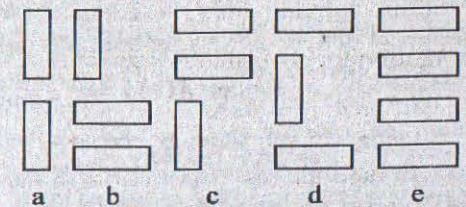


Fig. 12

are loc $x_n^b = x_n^c = \sum_{k=1}^{n-1} x_{n-1-k}$.

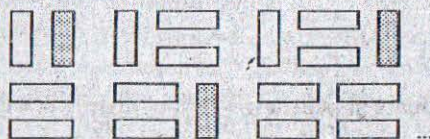


Fig. 13

Continuarea lui d până la prima dală verticală (ca în figura 14) ne asigură că

pentru $m = \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix}$ are loc $x_n^d = \sum_{k=1}^m x_{n-2k-2}$.

Acum formula (10) devine în funcție de paritatea lui n

$$(R_{17}) \quad \begin{aligned} x_{2k} &= x_{2k-1} + 3x_{2k-2} + 2x_{2k-3} + 3x_{2k-4} + \dots + 2x_1 + 3x_0 \\ x_{2k+1} &= x_{2k} + 3x_{2k-1} + 2x_{2k-2} + 3x_{2k-3} + \dots + 3x_1 + 2x_0 \end{aligned}$$

Trecând n în $n+2$ și scăzând egalitățile se obține relația de recurență

$$(R'_{17}) \quad x_n = x_{n-1} + 5x_{n-2} + x_{n-3} - x_{n-4}.$$

Ecuția caracteristică $t^4 - t^3 - 5t^2 - t + 1 = 0$ este reciprocă și are rădăcini

$$t_1 = \frac{1}{4} \left[1 + \sqrt{29} + \sqrt{14 + 2\sqrt{29}} \right], \quad t_2 = \frac{1}{4} \left[1 + \sqrt{29} - \sqrt{14 + 2\sqrt{29}} \right],$$

$$t_3 = \frac{1}{4} \left[1 - \sqrt{29} + \sqrt{14 - 2\sqrt{29}} \right], \quad t_4 = \frac{1}{4} \left[1 - \sqrt{29} - \sqrt{14 - 2\sqrt{29}} \right].$$

Urmează existența unor constante A_1, A_2, A_3, A_4 încât

$$x_n = A_1 t_1^n + A_2 t_2^n + A_3 t_3^n + A_4 t_4^n,$$

numerele A_i urmând a fi determinate prin

$$(I_{17}) \quad x_0 = 1, x_1 = 1, x_2 = p_4 = 5, x_3 = f_2 = 11.$$

Continuarea calculului are o semnificație redusă.

G.18. Care este numărul v_n al submulțimilor lui $\{1, 2, \dots, n\}$ ce nu conțin nici o pereche de numere consecutive?

Soluție. (Deși problema nu este corelată nici prin enunț nici prin soluție de „pavări” este inclusă aici datorită unei remarcabile corelații cu teorema 1.)

Fie $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ șirul lui Fibonacci. Unei mulțimi $M \subset \{1, 2, \dots, n\}$ îi asociem numărul natural $f(M) = \sum_{m \in M} u_m$; desigur $f(\emptyset) = 0$. Fie $\mathcal{A}_n$ familia submulțimilor admisibile. Observăm:

$$a_n = \max_{M \in \mathcal{A}_n} f(M) = u_n + u_{n-2} + \dots + u_{n-2[n/2]} = u_{n+1} - 1.$$

Funcția f constituie o corespondență biunivocă între $\mathcal{A}_n$ și mulțimea de numere naturale $\beta_n = \{k : 0 \leq k \leq a_n\}$. (Se poate vedea și problema 3.22 din [14]). Acum răspunsul este imediat: $u_n = \text{card } \mathcal{A}_n = \text{card } \beta_n = u_{n+1}$.

§ 2. Aplicații în combinatorică

Ne propunem aici să abordăm câteva probleme de combinatorică pe care le vom nota cu **C.1** – **C.13**, inițiala **C** sugerând termenul combinatorică. Deși știm că unele probleme (în special **C.1** – **4**) sunt bine cunoscute cititorului anvisajat le-am inclus aici pentru a conferi unitate paragrafului și lucrării în ansamblu.

C.1. Fiind date mulțimi X și Y cu n elemente să se arate că numărul P_n al bijecțiilor de la X la Y satisface condițiile inițiale și recurența: 1) $P_0 = 1$, $P_{n+1} = (n+1) \cdot P_n$. Să se deducă de aici $P_n = n!$

Soluție. Fie $B(X, Y)$ mulțimea bijecțiilor $f: X \rightarrow Y$. Ne propunem într-o primă etapă să arătăm că numărul P_n al acestor bijecții este independent de alegerile mulțimilor X, Y . Considerăm în acest scop și alte mulțimi X', Y' cu același număr n de elemente. Egalitatea numerelor de elemente asigură existența cel puțin a unor bijecții $\alpha: X' \rightarrow X$ și $\beta: Y \rightarrow Y'$. Definim o funcție $F: B(X, Y) \rightarrow B(X', Y')$ asociind lui $f \in B(X, Y)$ elementul $f' = F(f) = \beta \circ f \circ \alpha$ ce se dovedește imediat a fi în $B(X', Y')$. Se constată rapid că F este bijecție, deci $|B(X, Y)| = |B(X', Y')|$. (Aici și în continuarea paragrafului, pentru o mulțime finită A , $|A|$ notează numărul elementelor lui A).

Egalitatea $P_0 = 1$ are mai mult un caracter convențional dar este conformă cu numărarea funcțiilor prin intermediul graficelor lor: se poate considera că $\emptyset$ este singurul element din $\emptyset \times \emptyset$ și $\emptyset$ constituie graficul unei bijecții $\emptyset \rightarrow \emptyset$.

Vom considera $X = \overline{1, n}$, $U = B(X, X)$, $Z = \overline{1, (n+1)}$, $V = B(Z, Z)$. Desigur,

$P_n = |U|$, $P_{n+1} = |V|$. Desfacem $V = \bigcup_{i=1}^{n+1} V_i$, punând în V_i bijecțiile $f \in V$ ce satisfac $f(n+1) = i$. Asociem lui $f \in V_i$ elementul $f_0 \in B(X, Z \setminus \{i\})$ determinat prin $f_0(j) = f(j)$. Evident corespondența G cu $G(f) = f_0$ asigură o bijecție de la V_i la $B(X, Z \setminus \{i\})$. Avem deci $|V_i| = |B(X, Z \setminus \{i\})| = |B(X, X)| = P_n$ și urmează $|V| = \sum_{i=1}^{n+1} |V_i| = (n+1) \cdot P_n$, deci are loc (1).

Înmulțind membru cu membru egalitățile $P_1 = 1 \cdot P_0$, $P_2 = 2 \cdot P_1$, ..., $P_n = (n) \cdot P_{n-1}$ deducem $P_n = n(n-1) \cdot \dots \cdot 1 \cdot P_0$, adică $P_n = n!$. (După cum se știe P_n constituie „numărul permutărilor de n obiecte”.)

C.2. Fiind dată o mulțime X cu n elemente să se arate că numărul p_n al submulțimilor lui X satisface (2) $p_0 = 1$, $p_{n+1} = 2 \cdot p_n$ și să se deducă de aici $p_n = 2^n$.

Soluție. Evident $\emptyset$ admite doar o submulțime, $\emptyset$, deci $p_0 = 1$. Fie A o mulțime cu n elemente, $b \notin A$ și $B = A \cup \{b\}$. Considerăm $C = P(A)$ = familia submulțimilor lui A și $D = P(B)$. Prezentăm $D = C \cup E$ cu $C \cap E = \emptyset$, punând în E submulțimile $X \cup \{b\}$ pentru $X \in C$.

Rezultă $p_{n+1} = |D| = |C \cup E| = p_n + p_n = 2p_n$, etc.

C.3. Fie X o mulțime cu n elemente și, pentru $0 \leq k \leq n$, familia $P_k(X)$ a submulțimilor lui X ce conțin exact k elemente. Notând $C_n^k = |P_k(X)|$ să se

demonstreze (3) $C_n^0 = 1 = C_n^n$ și $C_n^{k+1} = \frac{n-k}{k+1} C_n^k$. Să se deducă formula $C_n^k \cdot P_k = A_n^k$.

Soluție. Condițiile inițiale din (3) fiind evidente, argumentăm relația de recurență. În ideea de a mai adăuga fiecărei mulțimi $Z \in P_k(X)$ un element t spre a obține elementul $Z \cup \{t\} \in P_{k+1}(X)$, elementul t poate fi ales în $(n-k)$ moduri. Dar elementul $Z \cup \{t\}$ provine din $(k+1) = C_{k+1}^1$ mulțimi $Z \in P_k(X)$.

Înmulțind membru cu membru egalitățile

$$C_n^1 = \frac{n}{1}, C_n^2 = \frac{n-2}{2} C_n^1, \dots, C_n^k = \frac{(n-k+1)}{k} C_n^{k-1}$$

$$\text{deducem } C_n^k = \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} = A_n^k \cdot P_k.$$

(Desigur C_n^k reprezintă „numărul combinărilor de n obiecte luate câte k “.)

C.4. Fiind date mulțimi X, Y cu n și respectiv m elemente să se arate că numărul $f_{n,m}$ din mulțimea Y^X a funcțiilor $f: X \rightarrow Y$ satisface

$$(4) f_{0,m} = 1 \text{ și } f_{n+1,m} = m \cdot f_{n,m}, \text{ deducând apoi } f_{n,m} = m^n.$$

Soluție. Condiția inițială având caracter convențional argumentăm recurența. Pentru $a \notin X$ considerăm $Z = X \cup \{a\}$. O funcție $g \in Y^Z$ generează m funcții

$$h_y \in Y^Z \text{ „prelungind” } g \text{ prin: } h_y(x) = \begin{cases} f(x) & \text{dacă } x \in X \\ y & \text{dacă } x = a, \end{cases} \text{ elementul } y \in Y \text{ fiind ales}$$

arbitrar. După fixarea lui m șirul $x_n = f_{n,m}$ constituie o progresie geometrică.

C.5. Să se arate că mulțimea F_n a permutărilor l lui $1, n$ fără puncte fixe (deci a acelor permutări $s: 1, n \rightarrow 1, n$ ce satisfac $\forall i \in 1, n, s(i) \neq i$) conține

$$D(n) = n! \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \right] \text{ elemente.}$$

Soluția I ([14] pag.38). Notând cu A_i mulțimea celor $(n-1)!$ permutări ale lui $1, n$ ce admit i ca punct fix, folosind principiul includerii și excluderii

$$\text{deducem } |A_1 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{i < j} |A_i \cap A_j| + \dots + (-1)^{n-1} \left| \bigcap_{i=1}^n A_i \right|.$$

Fie $K \subset 1, n$ o submulțime cu k elemente. Avem $\left| \bigcap_{i \in K} A_i \right| = (n-k)!$. Fixând

$k \leq n$ există C_n^k astfel de submulțimi K . Rezultă

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = C_n^1(n-1)! - C_n^2(n-2)! + \dots + (-1)^{n-1} \cdot C_n^n \text{ și urmează imediat formula din enunț.}$$

Soluția II (D.B.). Pentru un element $s \in F_{n+1}$ punem în evidență $i = s^{-1}(n+1)$ și $j = s(n+1)$; fixând (i, j) în $(1, n)^2$ dăm o submulțime $F_{n+1}(i, j)$ a lui F_{n+1} .

Dacă $i \neq j$ asociem lui $s \in F_{n+1}(i, j)$ elementul $t = \varphi_{i,j}(s)$ precizat prin

$$t(k) = \begin{cases} s(k) & \text{pentru } k \neq i \\ j & \text{pentru } k = i. \end{cases} \text{ Punem în evidență și } (F_n)_i^j = \{t / t \in F_n / t(i) = j\}.$$

Constatăm ușor că $\varphi_{i,j}$ este o bijecție a lui $F_{n+1}(i, j)$ în $(F_n)_i^j$ și constatăm

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{i \neq j} F_n(i, j) \right| &= n(n-1) |F_n(i, j)| = n(n-1) |(F_n)_i^j| = \\ &= n(n-1) \cdot \frac{1}{n-1} |F_n| = n \cdot D(n). \end{aligned}$$

Dacă $i = j$ asociem lui $s \in F_{n+1}(i, j)$ permutarea $p = \psi_i(s)$ a mulțimii $X_i = 1, n \setminus \{i\}$ precizată prin $p(k) = s(k)$ pentru $k \in X_i$. Deoarece X_i are $(n-1)$

elemente deducem $\left| \bigcup_{i=1}^n F_{n+1}(i, i) \right| = n \cdot D(n-1)$. Avem deci formula de recurență

(R) $D(n+1) = n[D(n) + D(n-1)]$. Nu este greu de constatat că formula enunțată satisface această relație de recurență și condițiile inițiale (I) $D(1) = 0$, $D(2) = 1$, deci $D(n) = |F_n|$. Deoarece recurența (R) nu este chiar dintre cele uzuale vom prezenta și o altă cale de a ajunge la formula enunțată din (R) și (I).

Să notăm pentru $n > 1$: $U_n = D(n) - n \cdot D(n-1)$. Avem desigur și $U_{n+1} = D(n+1) - (n+1) \cdot D(n)$. Înlocuind $D(n+1)$ din ultima egalitate în (R) obținem $D(n) - n \cdot D(n-1) + U_{n+1} = 0$, adică (R') $U_{n+1} = -U_n$, relație de recurență pentru șirul $(U_n)_{n \geq 2}$, ce satisface și condiția inițială (I') $U_2 = 1$. Rezultă imediat $U_n = (-1)^n$ și urmează de aici (R'') $D(n+1) = (n+1) \cdot D(n) + (-1)^{n+1}$.

Acum este ușor de ajuns de la (R'') la formula enunțată a lui $D(n)$.

Observație. În [17] vol. 9, Ion Muntean prezintă problema extrem de atractivă: D_n fiind numărul alegerilor de perechi la o serată la care participă n cupluri (soț și soție), toți dansează dar nimeni cu propria soție.

Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ se folosește notația $[x]_n = x(x-1) \dots (x-n+1)$; prin definiție se ia $[x]_0 = 1$.

Observație. Principalele argumente pentru utilitatea acestei notații sunt problemele C.6, C.7, C.9. Adăugăm însă de pe acum că pentru formula aranjamentelor vom avea $A_n^k = [n]_k$; desigur $n! = [n]_n$, iar formula combinărilor

$$\text{se transcrie } C_n^p = \frac{[n]_p}{[p]_p}.$$

Definiția 1. Pentru numere naturale n și $k \leq n$ se consideră numărul lui Stirling

$$\text{de prima speță } s(n, k) \text{ precizat prin egalitatea } (s) [x]_n = \sum_{k=0}^n s(n, k) x^k.$$

C.6. Se cere să se arate că numerele lui Stirling satisfac relația de recurență

$$(R_s) \quad s(n+1, k) = s(n, k-1) - n \cdot s(n, k)$$

pentru $0 < k < n$ și condițiile inițiale (I_s) $s(n, 0) = 0$, $s(n, n) = 1$.

Soluție. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ are loc $[x]_{n+1} = [x]_n \cdot (x - n)$. Explicitând această relație prin (s) deducem

$$(*) \quad \sum_{k=0}^{n+1} s(n+1, k) x^k = (x-n) \sum_{i=0}^n s(n, i) x^i = \sum_{i=0}^n s(n, i) x^{i+1} - \sum_{i=0}^n n s(n, i) x^i = \\ = -ns(n, 0) \cdot x^0 + \sum_{k=0}^n [s(n, k-1) - ns(n, k)] x^k + s(n, n) x^{n+1}.$$

Pentru $0 < k < n$ egalând coeficienții lui x^k din expresiile extreme deducem (R_s) . Pentru $k=0$ și $k=n+1$ obținem

$$(**) \quad s(n+1, 0) = -ns(n, 0), \quad s(n+1, n+1) = s(n, n).$$

Dar în relația (s) se observă că termenul liber din $[x]_n$ este nul deci $s(n, 0)=0$. Tot din (s) evaluând coeficientul lui x^n deducem $s(n, n)=1$.

Definiția 2. Se numește *numărul Stirling de a doua speță* numărul $S(n, p)$ precizat pentru numerele naturale nenule n, p atunci când $p \leq n$ și egal cu numărul partițiilor unei mulțimi cu n elemente în p clase. (Prin definiție, dacă $p > n, S(n, p) = 0$.)

C.7. Să se arate că numerele lui Stirling de a doua speță satisfac relația de recurență (R_s) $S(n+1, m) = S(n, m-1) + mS(n, m)$ pentru $1 < m \leq n$ și condițiile inițiale (I_s) $S(n, 1) = S(n, n) = 1$.

Soluție. Considerăm mulțimea P_{n+1}^m a partițiilor ε a lui $1, (n+1)$ în m clase.

Această partiție ε induce o partiție ε' a lui $1, n$. Dacă ε' are doar $(m-1)$ clase, atunci clasa lui $(n+1)$ în partiția ε trebuie să fie $\{n+1\}$. Dacă ε' are m clase, partiția ε poate distribui pe $(n+1)$ în oricare dintre aceste clase. Este asigurată astfel recurența (R_s) . Condițiile inițiale (I_s) sunt evidente.

C.8. Să se arate că numărul $s_{n,m}$ al surjecțiilor unei mulțimi X cu n elemente pe o mulțime Y cu m elemente este dat de $s_{n,m} = m! S(n, m)$, satisface relația de recurență (R_s) $s_{n+1,m} = m[s_{n,m-1} + s_{n,m}]$ și condițiile inițiale (I_s) $s_{n,1} = 1, s_{n,n} = n!$.

Soluție. O surjecție $f: X \rightarrow Y$ partiționează X în clasele $f^{-1}(y)$ unde y parcurge Y deci generează o partiție $\varepsilon_f = \{f^{-1}(y) \mid y \in Y\}$ a lui X în m clase. Considerând $Y = 1, m, \varepsilon_f$ determină un număr de $m!$ surjecții $g: X \rightarrow Y$ precizate prin renumerotarea claselor partiției ε_f .

Relația de recurență (R_s) se obține imediat din (R_s) iar (I_s) sunt evidente.

Observație. Folosind principiul includerii și al excluderii (vezi [14] problema 2.9, pag. 18 și 90) se demonstrează

$$s_{n,m} = m^n - C_m^1(m-1)^n + C_m^2(m-2)^n + \dots + (-1)^{m-1} C_m^{m-1}.$$

C.9. Să se arate că numerele lui Stirling de speță a doua $S(n, k)$ satisfac identitatea (S) $x^n = \sum_{k=1}^n S(n, k) \cdot [x]_k$.

Soluție ([14] pag. 99). Pentru mulțimi X și Y având n și respectiv m elemente considerăm mulțimea Y^X a funcțiilor $f: X \rightarrow Y$; se știe (vezi C.4.) $|Y^X| = m^n$.

Desfacem Y^X în submulțimi disjuncte A_k punând f în A_k dacă $|f(X)| = |\{f(x) \mid x \in X\}| = k$. Obținem cu ajutorul problemei precedente $|A_k| = C_m^k \cdot s_{n,k} = C_m^k \cdot k! S(n, k) = m(m-1) \dots (m-k+1) \cdot S(n, k) = [m]_k \cdot S(n, k)$

Deducem astfel pentru $0 < k \leq m \leq n$ egalitatea auxiliară:

$$(A_9) \quad m^k = \sum_{k=1}^n S(n, k) \cdot [m]_k. \text{ După această pregătire pentru a demonstra (S) vom considera polinomul } P \text{ precizat prin } P(x) = x^n - \sum_{k=1}^n S(n, k) \cdot [x]_k.$$

Evident gradul lui P nu depășește n ; este strict mai mic decât n deoarece coeficientul lui x^n este $1 - S(n, n) = 1 - 1 = 0$. Egalitățile auxiliare (A) asigură anularea lui P pentru $x = m = 1, 2, \dots, n$. Deci polinomul P de grad cel mult $(n-1)$ are n rădăcini distincte, adică este polinomul nul, deci (S) este o identitate.

C.10. Să se arate că numerele lui Stirling de speță a doua satisfac relația de recurență (R'_s) $S(n+1, m) = \sum_{k=m-1}^n C_n^k \cdot S(k, m-1)$.

Soluție ([14] pag. 101). Considerăm mulțimea celor $S(n+1, m)$ partiții ε ale lui $1, n+1$ în m clase. Suprimând clasa ce îl conține pe $n+1$ obținem o partiție ε' a unei mulțimi $Y \subset 1, n$. Notând $k = |Y|$ avem $k \geq m-1$ deoarece cele $(m-1)$ clase rămase ale partiției ε conțin fiecare cel puțin câte un element. Din $Y \subset 1, n$ rezultă și $k \leq n$.

Dacă η este altă partiție decât ε a lui $1, n+1$ în m clase, partiția η' asociată nu poate coincide cu ε' . Când ε este arbitrară, ε' parcurge clasa tuturor partițiilor submulțimilor $Y \subset 1, n$ unde $m-1 \leq |Y| \leq n$.

Dată ε' , partiție cu k clase, putem reconstitui ε mai adăugându-i o clasă ce conține $(n+1)$ și cele $(n-k)$ elemente din $1, n \setminus Y$. Acestea pot fi însă alese în $C_{n-k}^{n-k} = C_m^k$ moduri, deci are loc (R'_s) .

Definiția 3. Se numește *număr Bell* un număr B_n egal cu numărul partițiilor unei mulțimi cu n elemente. Folosind numerele lui Stirling de speță a doua avem deci

$$B_n = S(n, 1) + S(n, 2) + \dots + S(n, n).$$

C.11. Să se arate că numerele Bell satisfac relația de recurență

$$(R_B) \quad B_{n+1} = \sum_{k=0}^n C_n^k B_k \text{ și condiția inițială } (I_B) \quad B_0 = 1.$$

Soluție. Se sumează după m (de la 1 la $n+1$) relațiile de recurență (R'_s) din C.10 (I_B) este evidentă.

Definiția 4. Se numește *partiție parțială* a unei mulțimi X o partiție a unei submulțimi nevide Y a lui X .

C.12. Să se arate că numărul partițiilor parțiale ale unei mulțimi X cu n elemente este egal cu $B_{n+1} - 1$.

Soluție. Fie $X = 1, n$ și $Z = 1, n+1$. Din orice partiție parțială p a lui X se obține o partiție p' a lui Z adăugând claselor lui p o clasă ce conține $n+1$ și elementele

nepartiționate de p în X . Partiția p' parcurge fără repetiție clasa partițiilor lui Z exceptând-o pe cea cu o singură clasă.

Definiția 5. Numărul lui Catalan T_n este numărul de moduri în care se pot pune parantezele într-un produs neasociativ de n factori.

(Prin definiție $T_1 = T_2 = 1$.)

C.13. Să se arate că numerele lui Catalan verifică relația de recurență

$$(R_C) \quad T_n = \sum_{k=1}^{n-1} T_k T_{n-k}.$$

Soluție ([14] pag. 109). Fie $x_1 x_2 \dots x_n$ produsul ce trebuie explicat prin plasarea parantezelor. Pot exista r perechi de paranteze „finale” ce nu sunt conținute în alte paranteze și $r = 1$ sau $r = 2$. Dacă $r = 1$, perechea de paranteze „finale” cuprinde în interior un produs de $(n-1)$ factori ce vor necesita T_{n-1} paranteze. Parantezele finale îl pot exclude pe x_1 sau pe x_n . Aceste eventualități vor apare în formula (R_C) luând $k = 1$ și $k = n-1$. Dacă $r = 2$, primele paranteze finale vor cuprinde $x_1 \dots x_k$ iar celelalte vor cuprinde $x_{k+1} \dots x_n$. Desigur $2 \leq k \leq n-2$. Pentru aceste produse vor mai fi necesare câte T_k respectiv T_{n-k} paranteze interioare.

Observație. Determinarea efectivă a numerelor lui Catalan, adică formula

$$(C) \quad T_n = \frac{1}{2n-1} C_{2n-1}^{n-1}$$

este prezentată în **G.10.** din III § 1. ca număr de

triangulări prin diagonale ale unui poligon convex cu $(n+1)$ vârfuri. Atragem atenția și asupra neuniformității în notarea indicelui în capitole de combinatorică și respectiv geometrie. Bijeția între triangulații și plasări de paranteze este explicitată în [14] pr. 3.25 pag. 112. Prezentăm aici o modalitate de explicitare a lui T_n folosind tehnicile analizei matematice; mai precis vom căuta funcția generatoare t a șirului $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Fie deci $t(x) = T_1 x + T_2 x^2 + \dots + T_n x^n + \dots$

Pentru moment nu ne preocupăm de convergența seriei din membrul drept. Prin ridicare la pătrat și ordonare după puterile crescătoare ale lui x găsim

$$[t(x)]^2 = T_1^2 x^2 + (T_1 T_2 + T_2 T_1) x^3 + \dots + \left(\sum_{k=1}^{n-1} T_k T_{n-k} \right) x^n + \dots$$

Ținând seama de relația de recurență (R_C) și de condiția inițială $T_1 = 1$ deducem $[t(x)]^2 = t(x) - x$. Rezolvând această ecuație de grad doi și alegând cea rădăcină ce satisface $t(0)=0$ găsim $t(x) = \frac{1}{2} [1 - \sqrt{1-4x}]$.

(Acum se poate preciza că seria $T(x)$ este convergentă pentru $|x| < \frac{1}{4}$).

Din acest moment dezvoltarea lui T în serie Taylor nu mai reclamă decât dificultăți tehnice.

§ 1. Compuneri de funcții

Fie funcția $f: E \rightarrow E$, $E \subseteq \mathbb{R}$. Notăm cu $f_n: E \rightarrow E$, $n \geq 2$, următoarea compunere de funcții: $f_n = f_{n-1} \circ f$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, iar cu f_1 se va nota funcția f .

1. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}^*$.

Să se determine $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

2. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Să se determine $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

3. Se dă $f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, $f(x) = \sqrt{x}$. Să se determine funcția $f_n: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

4. Se dă $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Să se determine $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

5. Fie funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{+1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{+1\}$, $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$. Să se determine funcția $f_n: \mathbb{R} \setminus \{+1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{+1\}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ și să se studieze bijectivitatea lui f_n , $n \in \mathbb{N}^*$.

6. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ -x, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$. Să se determine $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ și să se arate că f_n este bijectivă pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

7. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ 1-x, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$. Să se determine $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ și să se arate că f_n este bijectivă pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

8. Fie funcția $g: \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, $g(x) = \frac{1}{1-x}$.

a) Să se arate că g este bijectivă.

b) Să se calculeze $g_n: \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ și să se arate că g_n este bijectivă pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Să se determine funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, astfel încât $f(x) + f(g_n(x)) = x$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

9. Dacă funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este crescătoare pe $\mathbb{R}$, atunci f și f_n , (unde $n \geq 2$) admit aceleași puncte fixe.

§ 2. Șiruri convergente

1. Fie șirul $(a_n)_{n \geq 0}$ dat prin $13^{a_n} = 12^{a_{n-1}} + 5^{a_{n-2}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$. Să se arate că șirul $(a_n)_{n \geq 0}$ este convergent și să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

2. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ dat prin $5^{x_{n+2}} = 4^{x_{n+1}} + 3^{x_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ cu $x_0 = 0$, $x_1 = 1$. Să se arate că șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este convergent și să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, $\inf_{n \in \mathbb{N}} x_n$, $\sup_{n \in \mathbb{N}} x_n$.

3. Fie șirul $(a_n)_{n \geq 2}$ definit prin $a_{n+1} = \sqrt[n]{n + a_n^{n-1}}$, $n \geq 2$, $a_2 = 1$.

a) Să se determine termenul general a_n .

b) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. (O.M. etapa locală, București, 1985)

4. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ definit prin $x_{n+1} = \frac{x_n^2}{1 + x_n}$; $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_0 = 1$.

Să se arate că șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este convergent la 0.

5. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ dat prin relația $x_{n+1} = \frac{x_n}{1 + nx_n^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_0 > 0$.

Să se arate că dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n$ există și este diferită de zero, atunci în mod necesar va fi egală cu 1.

6. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ definit prin $x_{n+1} = x_n(1 - x_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, unde $x_0 \in (0, 1)$.

Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n = 1$.

7. Fie $a \in (0, 1)$ și șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ definit prin $x_{n+1} = x_n - x_n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_0 = a$.

Să se arate că

a) șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este convergent și $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$;

b) șirul $(y_n)_{n \geq 1}$, $y_n = \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n-1}}$ este convergent și $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 1$;

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n = 1$.

8. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ definit prin relația $x_{n+1} = x_n + e^{-x_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ și $x_0 \in \mathbb{R}$.

Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{\ln n} = 1$.

(O.M. etapa finală, 1986)

9. Fie șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ definit prin $a_{n+1} = a_n^3 - a_n^2 + 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, unde $a_1 \in (0, 1)$.

Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n)$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^n$.

10. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ definit prin $x_{n+1} = e^{x_n} - 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, unde $x_1 < 0$.

Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n = -2$.

11. Se dă șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ prin relația $x_{n+1} = x_n + \sqrt{1 + \frac{x_n}{n}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_1 = 2$.

Se cere:

a) să se demonstreze că $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \leq \frac{x_n}{n} \leq 2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$;

b) să se arate că șirul $\left(\frac{x_n}{n}\right)_{n \geq 1}$ este convergent;

c) să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n}$.

(O.M. etapa locală, Neamț, 1994)

12. a) Fie $a \in \mathbb{R}^*$. Să se arate că ecuația $x + x^3 = a$, are o singură rădăcină reală.

b) Fie șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ dat prin relația $x_{n+1} + x_{n+1}^3 = x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_0 > 0$.

Să se arate că șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este convergent și să se determine $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

(Admitere Facultatea de Matematică, 1988)

13. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ definit prin relația $x_n^3 + n^2 x_n + 1995 = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Să se arate că șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este convergent și să se determine limita sa

14. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ definit prin relația $x_{n+1}^3 + (2n+1)x_{n+1} = x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_0 = a > 0$. Să se arate că șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este convergent și să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

15. Fie șirul $(a_n)_{n \geq 1}$, unde a_n reprezintă rădăcina reală a ecuației

$$x^3 + nx - n = 0, n \in \mathbb{N}^*.$$

1) Să se arate că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este monoton și mărginit.

2) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

16. Să se arate că $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ ecuația $x^n - nx + 1 = 0$ are două rădăcini α_n și β_n cu proprietățile: a) $0 < \alpha_n < 1 < \beta_n$; b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$; c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 1$.

17. Fie $f_n : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ cu $f_1(x) = -x^2 + 2x$ și $f_n = f_{n-1} \circ f_1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Să se arate că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ cu $a_n = f_n(x)$ este convergent și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} 1, & x \in (0, 1] \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

18. Se consideră șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ definit prin $a_{n+1} = \frac{1}{2}(b + a_n^2)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_1 = 0$, $b \in [0, 1]$.

1) Să se arate că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este convergent. 2) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

19. Să se arate că orice șir $(x_n)_{n \geq 0}$ de numere reale ce verifică relația $(n+1)x_{n+2} - nx_{n+1} - x_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, este convergent.

(O.M. etapa județeană, 1979)

20. a) Fie $(a_n)_{n \geq 0}$, $(b_n)_{n \geq 0}$ două șiruri de numere reale.

Dacă i) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ și ii) șirul $(b_n)_{n \geq 0}$ este mărginit, atunci șirul $(x_n)_{n \geq 0}$,

$x_n = \frac{1}{n+1}(a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \dots + a_n b_0)$ este convergent și $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

b) Dacă șirurile $(a_n)_{n \geq 0}$, $(b_n)_{n \geq 0}$ sunt convergente și $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, atunci șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ definit la 1) este convergent și $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = ab$.

(O.M. etapa finală, 1988)

21. Se consideră șirurile de numere reale $(a_n)_{n \geq 0}$, $(b_n)_{n \geq 0}$, $(c_n)_{n \geq 0}$, $(d_n)_{n \geq 0}$

astfel încât $a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 - 4a_n + 2b_n - 6c_n + 14 = d_n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Să se arate că dacă șirul $(d_n)_{n \geq 0}$ este convergent la zero, atunci șirurile $(a_n)_{n \geq 0}$, $(b_n)_{n \geq 0}$, $(c_n)_{n \geq 0}$ sunt convergente și să se determine limitele lor.

22. Fie $a, b \in (0, +\infty)$ și șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ definit prin $x_{n+1}^2 + ab = (a+b)x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_0 = \frac{a+b}{2}$. Să se arate că șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este convergent și să se determine $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

23. Fie $(x_n)_{n \geq 1}$ un șir descrescător cu limita 1. Să se calculeze limita șirului $(y_n)_{n \geq 1}$, $y_n = \left(1 + \frac{x_1}{n}\right) \left(1 + \frac{x_2}{n}\right) \dots \left(1 + \frac{x_n}{n}\right)$.
(O.M. etapa locală, București, 1989)

24. Fie șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ definit prin $a_1 \in (0, 2)$,
$$\frac{1}{2}(1 + a_n a_{n+1}) = \begin{cases} a_{n+1}, & a_n \leq 1 \\ a_n, & a_n > 1, \end{cases} \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Să se arate că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este convergent și să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

25. Fie x un număr real strict pozitiv. Definim șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ astfel încât

$$a_1 = \arctg x, a_n = \arctg a_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

a) Să se arate că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este convergent.

b) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

§ 3. Limite de funcții și continuitate

1. Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 2x \cos 3x \dots \cos nx}{x^2}$ știind că această limită există și este finită oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Să se calculeze $L_n = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x} \sqrt[3]{\cos 3x} \dots \sqrt[n]{\cos nx}}{x^2}$ știind că această limită există și este finită oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Se dă funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continuă pe $\mathbb{R}$ cu proprietățile:

$$(1) f(0) = 1 \text{ și } (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - f(nx)}{x^2} = a_n.$$

Să se calculeze $E_n = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - f(x)f(2x)f(3x) \dots f(nx)}{x^2}$ știind că această limită există și este finită $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

4. Se dă o funcție $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ continuă pe $\mathbb{R}$ cu proprietățile:

$$(1) f(0) = 1 \text{ și } (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - f(nx)}{x^2} = a_n. \text{ Să se calculeze}$$

$$L_n = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - f(x) \sqrt[3]{f(2x)} \sqrt[3]{f(3x)} \dots \sqrt[n]{f(nx)}}{x}$$

știind că această limită există și este finită oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

5. Dacă funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ are proprietățile: (1) f continuă în $x_0 = -\frac{1}{2}$ și

(2) $f(3x+1) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, atunci f este continuă pe $\mathbb{R}$.

6. Să se determine funcțiile continue $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea

$$f(2x+1) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

(O.M. etapa județeană, Iași, 1987)

7. Dacă $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ îndeplinește condițiile:

$$1) f \text{ continuă în } x_0 = \frac{b}{1-a};$$

2) $f(ax+b) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, unde $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$, $b \in \mathbb{R}$ numere reale fixate, atunci f este continuă pe $\mathbb{R}$.

§ 4. Derivate de ordin superior

1. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = xe^x$. Să se determine derivata de ordinul n a funcției f știind că ea are forma $f^{(n)}(x) = e^x(x + a_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, unde $(a_n)_{n \geq 1}$ este un șir de numere reale ce se cere determinat.

2. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x(2x-5)$. Să se arate că derivata de ordinul n a funcției f se poate scrie sub forma $f^{(n)}(x) = e^x(a_n x + b_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, și să se determine $(a_n)_{n \geq 1}$, $(b_n)_{n \geq 1}$.

3. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 e^x$. Să se arate că derivata de ordinul n este de forma $f^{(n)}(x) = e^x(x^2 + a_n x + b_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n, b_n \in \mathbb{N}$ și apoi să se determine a_n, b_n în funcție de n .

4. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 e^x$. Să se arate că derivata de ordinul n a funcției f se poate scrie sub forma $f^{(n)}(x) = e^x[(-1)^n x^2 + a_n x + b_n]$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ și să se determine a_n, b_n în funcție de n .

5. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x(2x^2 - 3x)$. Să se arate că derivata de ordinul n a funcției f se poate scrie sub forma $f^{(n)}(x) = e^x(2x^2 + a_n x + b_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, cu $a_n, b_n \in \mathbb{R}$. Să se determine a_n, b_n în funcție de n și să se arate că ecuația $2x^2 + a_n x + b_n = 0$ admite soluții reale și distincte $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

6. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = e^{-x^2}$. Să se arate că derivata de ordinul n a funcției f are forma $f^{(n)}(x) = P_n(x)e^{-x^2}$, unde P_n este o funcție polinomială de grad n cu coeficienți reali. Să se arate că P_n satisface relația $P_{n+1}(x) + 2xP_n(x) + 2nP_{n-1}(x) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

(Admitere Facultatea de Matematică 1983)

7. Fie funcția $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$. Să se arate că derivata de ordin n a

funcției f are forma $f^{(n)}(x) = (-1)^n P_n(x) \cdot x^{-2n} e^{\frac{1}{x}}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, unde P_n este o funcție polinomială de grad $n-1$ cu coeficienți reali ce satisface

$$P_{n+1}(x) + (1 + 2nx)P_n(x) + n(n-1)x^2 P_{n-1}(x) = 0.$$

8. Fie funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Să se arate că derivata de ordin n a funcției f are forma $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{\frac{n+1}{2}}}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, unde $P_n(x)$ este o funcție polinomială de grad n cu coeficienți reali. Să se calculeze $f^{(n)}(0)$.

9. Fie funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \sin^2 x - x^2 + \frac{x^4}{4}$. Să se arate că $f^{(n+1)}(x) = 2^n \sin\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right)$. (Admitere Facultatea de Matematică 1979)

10. Fie funcția $f(x) = \frac{1}{x+a}$, $a \in \mathbf{R}$, $a > 0$. Să se studieze convergența șirului $(x_n)_{n \geq 1}$ și să se afle limita sa, unde $x_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} f^{(k)}(a)$.

11. Fie funcția $f: \mathbf{R} \setminus \{-1, 2\} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$. Să se determine limita șirului $(a_n)_{n \geq 1}$, unde $a_n = n^2 \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(n+3)$. (Admitere Institut Politehnic 1986)

12. Fie funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ Să se arate că funcția f este indefinit derivabilă pe $\mathbf{R}$ și să se calculeze $f^{(n)}(0)$, $n \in \mathbf{N}^*$.

13. Dacă f, g sunt două funcții indefinit derivabile pe intervalul I ($I \subseteq \mathbf{R}$), atunci $(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(n-k)} g^{(k)}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$. (Formula lui Leibniz)

14. Fie funcția $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = e^{a \arcsin x}$, $a \in \mathbf{R}^*$. Să se arate că f satisface relația $(1-x^2)f^{(n+2)}(x) - (2n+1)f^{(n+1)}(x) - (n^2+a^2)f^{(n)}(x) = 0$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\forall x \in (-1, 1)$.

15. Fie funcția $f(x) = \arccos 2x$ definită pe domeniul maxim de definiție.

a) Să se afle domeniul maxim de definiție al derivatei de ordin $(n+2)$ și să se stabilească o relație între derivatele de ordin n , $(n+1)$, $(n+2)$.

b) Să se calculeze derivata de ordin n a funcției în punctul $x_0 = 0$.

(O.M. etapa finală, 1969)

16. Fie funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$. Să se arate că f este indefinit derivabilă pe $\mathbf{R}$ și să se calculeze $f^{(n)}(0)$, $n \in \mathbf{N}^*$.

17. Fie funcția $f: E \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{ax+b}}$, $a \in \mathbf{R}^*$, $b \in \mathbf{R}$, E - domeniul maxim al funcției f . Să se arate că f este indefinit derivabilă pe E și $f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^{n+1}} \cdot a^n$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

18. Fie $f: I \rightarrow \mathbf{R}$, o funcție continuă pe I ce satisface relația

$$f(x) - f(y) = (y-x)f(x) \cdot f(y), \forall x, y \in I.$$

Să se arate că f este indefinit derivabilă pe I și $f^{(n)}(x) = (-1)^n n! f^{(n+1)}(x)$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\forall x \in I$.

19. Fie $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, o funcție derivabilă cu proprietatea $f'(x) = a f(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$, unde a este un număr real nenul fixat. Să se arate că f admite derivate de orice ordin.

20. Să se arate că există șiruri $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$ încât

$$(1) \quad (1+x)^{\frac{1}{x}} = e(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots) \text{ respectiv}$$

$$(2) \quad (1+x)^{-\frac{1}{x}} = e(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n + \dots)$$

și că aceste șiruri pot fi definite prin condițiile inițiale $a_0 = b_0 = 1$ și relațiile de recurență

$$(3) \quad \sum_{j=0}^n (-1)^{j+1} \frac{j+1}{j+2} \cdot a_{n-j} = (n+1)a_{n+1} \text{ respectiv}$$

$$(4) \quad \sum_{j=0}^n (-1)^j \frac{j+1}{j+2} \cdot b_{n-j} = (n+1)b_{n+1}.$$

Să se deducă de aici existența și valoarea următoarelor limite:

$$L_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left[\left(1 + \frac{1}{n+a}\right)^{n+a} - \left(1 + \frac{1}{n+b}\right)^{n+b} \right];$$

$$L_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left[\left(1 + \frac{1}{2n}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e \right];$$

$$L_3 = \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \left[\left(1 + \frac{1}{2n} - \frac{5}{24n^2}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e \right];$$

$$L_4 = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+a} - e \right], (a \in \mathbf{R});$$

$$L_5 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+a} - \frac{e}{2} (2n^2 - 2a + 1) \right], (a \in \mathbf{R}).$$

Dacă $x_n = 2n \left[e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]$, să se determine

$$\begin{aligned} L_6 &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\ln x_n)^n; & L_7 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]^n; \\ L_8 &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[e \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n - 1 \right]; & L_9 &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[1 - e \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n \right]; \\ L_{10} &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^k \left[\left(b_0 + \frac{b_1}{n} + \dots + \frac{b_{k-1}}{n^{k-1}} \right) \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n - e \right], k \in \mathbf{N}^*; \\ L_{11} &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^k \left[\left(a_0 + \frac{a_1}{n} + \dots + \frac{a_{k-1}}{n^{k-1}} \right) \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-n} - \frac{1}{e} \right], k \in \mathbf{N}^*. \end{aligned}$$

(Dorin Andrica și Laszlo Toth în [17], Selected papers, pag. 1 - 10)

§ 5. Primitive

1. Fie funcțiile $f_n: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definite astfel: $f_n(x) = \begin{cases} \sin^n \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0, n \in \mathbf{N}^* \end{cases}$.

- a) Să se arate că f_2 nu are primitivă pe $\mathbf{R}$ și că f_3 are primitivă pe $\mathbf{R}$.
b) Să se arate că f_n are primitivă pe $\mathbf{R}$ dacă și numai dacă n este impar.

(Etapa județeană cl. a XI-a, 1982)

2. Să se stabilească relații de recurență pentru

- a) $F_n(x) = \int x^n e^x dx, x \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}$.
b) $G_n(x) = \int \ln^n x dx, x \in (0, +\infty), n \in \mathbf{N}^*$.
c) $H_n(x) = \int x^n \sin x dx, x \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}$.
d) $K_n(x) = \int x^n \cos x dx, x \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}$.
e) $S_n(x) = \int \sin^n x dx, x \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}$.
f) $C_n(x) = \int \cos^n x dx, x \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}$.
g) $L_n(x) = \int \frac{dx}{\cos^n x}, x \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right), n \in \mathbf{N}, n \geq 2$.
h) $M_n(x) = \int \frac{dx}{\sin^n x}, x \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right), n \in \mathbf{N}, n \geq 2$.
i) $T_n(x) = \int \operatorname{tg}^n x dx, x \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right), n \in \mathbf{N}, n \geq 2$.
j) $P_n(x) = \int \operatorname{ctg}^n x dx, x \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right), n \in \mathbf{N}, n \geq 2$.

k) $Q_n(x) = \int e^{ax} \sin^n x dx, x \in \mathbf{R}, a \in \mathbf{R}^*, n \in \mathbf{N}$.

l) $R_n(x) = \int e^{ax} \cos^n x dx, x \in \mathbf{R}, a \in \mathbf{R}^*, n \in \mathbf{N}$.

m) $F_n(x) = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}, x \in \mathbf{R}, a \in \mathbf{R}^*, n \in \mathbf{N}^*$.

n) $G_n(x) = \int \frac{dx}{(a^2 - x^2)^n}, x \in (-a, a), a > 0, n \in \mathbf{N}^*$.

o) $H_n(x) = \int \frac{x^n}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx, x \in (-a, a), a > 0, n \in \mathbf{N}^*$.

p) $K_n(x) = \int \frac{x^n}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx, a > 0, x \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}^*$.

q) $L_n(x) = \int \frac{x^n}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx, n \in \mathbf{N}^*, x \in (-\infty, -a) \cup (a, +\infty), a > 0$.

r) $M_n(x) = \int \frac{x^n}{\sqrt{1+x}} dx, x \in (-1, +\infty), n \in \mathbf{N}^*$.

s) $N_n(x) = \int (\arcsin x)^n dx, x \in (-1, 1), n \in \mathbf{N}^*$.

t) $P_n(x) = \int (\arccos x)^n dx, x \in (-1, 1), n \in \mathbf{N}$.

u) $F_{m,n}(x) = \int x^m \ln^n x dx, x \in (0, +\infty), m, n \in \mathbf{N}$.

v) $G_{m,n}(x) = \int \sin^m x \cos^n x dx, x \in \mathbf{R}, m, n \in \mathbf{N}^*$.

x) $H_{m,n}(x) = \int \frac{x^m}{(a^2 + x^2)^n} dx, x \in \mathbf{R}, a \in \mathbf{R}^*, m, n \in \mathbf{N}^*$.

3. Să se stabilească o relație de recurență pentru

$$F_n(x) = \int x^n \sqrt{1+x+x^2} dx, x \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}^*.$$

4. Să se găsească o formulă de recurență pentru $F_n(x) = \int x^{-n} e^{\frac{1}{x}} dx$.

5. Fie $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \frac{1}{x(1+x^2)^n}, n \in \mathbf{N}^*$ și $F_n(x) = \int f(x) dx$.

Să se stabilească o relație de recurență pentru $F_n(x), n \in \mathbf{N}^*$.

6. Să se stabilească o relație de recurență pentru $F_n(x) = \int \frac{\sin nx}{\sin x} dx,$

$x \in (0, \pi), n \in \mathbf{N}$.

7. Să se stabilească relații de recurență pentru următoarele primitive:

a) $F_n(x) = \int \frac{x^n e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}} dx, x \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}^*$.

b) $H_n(x) = \int \frac{x^n e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{(1+x^2)^3}} dx, x \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}^*$.

8. a) Să se stabilească o formulă de recurență pentru integralele de tipul

$$F_n(x) = \int \frac{x^n}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx, \quad n \in \mathbf{N}^*, \quad a, b, c \in \mathbf{R}, \quad a \neq 0, \quad x \in E \quad (E - \text{domeniul maxim de definiție}).$$

b) Să se deducă o metodă de calcul care să necesite o singură cuadratură și metoda coeficienților nedeterminați pentru integrale de forma $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$, unde $P_n(x)$ este o funcție polinomială de grad n .

9. Se dă $F_n(x) = \int \frac{\sin nx}{\cos x - 1} dx, \quad x \in (0, 2\pi), \quad n \in \mathbf{N}.$

a) Să se determine numerele reale a, b, c , astfel încât

$$aF_n(x) + bF_{n-1}(x) + cF_{n-2}(x) = \frac{-2 \cos(n-1)x}{n-1}, \quad n \in \mathbf{N}, \quad n \geq 2.$$

b) Să se calculeze $F_4(x)$.

10. Să se stabilească o relație de recurență pentru $F_n(x) = \int \frac{x^n}{1+x+x^2} dx, \quad x \in \mathbf{R}, \quad n \in \mathbf{N}^*.$

11. Să se stabilească relații de recurență pentru:

a) $F_n(x) = \int x^n \operatorname{ch} x dx$ și

b) $G_n(x) = \int x^n \operatorname{sh} x dx, \quad x \in \mathbf{R}, \quad n \in \mathbf{N}^*.$

c) $H_n(x) = \int \operatorname{ch}^n x dx,$

d) $K_n(x) = \int \operatorname{sh}^n x dx, \quad x \in \mathbf{R}, \quad n \in \mathbf{N},$

e) $L_n(x) = \int x^{-n} e^x dx, \quad x \in (0, +\infty), \quad n \in \mathbf{N}, \quad n \geq 2.$

12. Să se stabilească o formulă de recurență pentru $F_n(x) = \int (a+bx^p)^n dx, \quad x \in (0, +\infty), \quad p, n \in \mathbf{N}, \quad a, b \in \mathbf{R}^*, \quad p \geq 1.$

13. Să se stabilească o formulă de recurență pentru

$$F_{n,m}(x) = \int x^m (a+bx^p)^n dx, \quad x \in (0, +\infty), \quad m, n, p \in \mathbf{N}, \quad a, b \in \mathbf{R}^*, \quad m, p \geq 1.$$

14. Fie $F_n(x) = \int \frac{e^x (x^n - n!)}{x^{n+1}} dx, \quad x \in (0, +\infty), \quad n \in \mathbf{N}^*.$ Să se calculeze

$F_1(x), F_2(x)$ și apoi $F_n(x), \quad n \in \mathbf{N}^*.$ (O.M. etapa locală, Giurgiu, 1986)

15. Să se stabilească relații de recurență pentru $F_n(x) = \int x^n \cos \ln x dx$ și $H_n(x) = \int x^n \sin \ln x dx, \quad x \in (0, +\infty), \quad n \in \mathbf{N}^*.$

16. Să se stabilească o relație de recurență pentru $F_n(x) = \int \frac{dx}{(1-x^4)^n}, \quad x \in (-1, 1), \quad n \in \mathbf{N}, \quad n \geq 2.$

17. Fie $F_n(x) = \int \frac{x}{(x-a)^n (x-b)^n} dx, \quad x \in \mathbf{R} \setminus \{a, b\}, \quad a, b \in \mathbf{R}, \quad a \neq b, \quad n \in \mathbf{N}^*.$

Să se stabilească o relație de recurență pentru $F_n(x)$.

§ 6. Integrala definită

1. Să se stabilească relații de recurență pentru următoarele integrale:

a) $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx, \quad n \in \mathbf{N};$

b) $I_n = \int_0^1 x^n a^x dx, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad n \in \mathbf{N};$

c) $I_n = \int_0^1 \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}, \quad a > 0, \quad n \in \mathbf{N}^*;$

d) $I_{m,n} = \int_1^{\sqrt{e}} x^m \ln^n x dx, \quad m, n \in \mathbf{N}^*;$

e) $I_n = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^n x}, \quad n \in \mathbf{N}^*;$

f) $I_n = \int_{-1}^1 \frac{dx}{(4-x^2)^n}, \quad n \in \mathbf{N}^*;$

g) $I_n = \int_0^3 \frac{x^n dx}{\sqrt{x+1}}, \quad n \in \mathbf{N}^*;$

h) $I_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad n \in \mathbf{N}^*.$

2. Fie șirul $(a_n)_{n \geq 1}$, unde $a_n = \int_1^e \ln^n x dx, \quad \forall n \in \mathbf{N}^*.$

Să se arate că: a) $a_{n+1} < a_n, \quad \forall n \in \mathbf{N}^*;$ b) $a_n > 0, \quad \forall n \in \mathbf{N}^*;$ c) $a_n = e - na_{n-1}, \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad n \geq 2;$ d) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$

3. Se dă șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ definit prin $a_n = \int_0^1 \ln(1+x^n) dx, \quad \forall n \in \mathbf{N}^*.$

a) Să se calculeze $a_1, a_2, a_3.$

b) Să se arate că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este convergent.

4. Fie șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ definit prin $a_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx, \quad \forall n \in \mathbf{N}^*.$

a) Să se arate că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este convergent.

b) Să se stabilească o formulă de recurență.

c) Să se arate că $a_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}, \quad \forall n \in \mathbf{N}^*.$

d) Să se calculeze suma $\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{C_n^k}{2k+1}.$

5. Se dă șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ unde $a_n = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2+2x}}}}$ (n radicali).

a) Să se arate că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este monoton și mărginit.

b) Să se demonstreze inegalitățile

$$\frac{1}{2} \leq a_n \leq \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2}}}} \quad (n \text{ radicali}).$$

c) Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}$.

6. Fie $\beta_{m,n} = \int_0^1 x^m (1-x)^n dx$, $m, n \in \mathbf{N}^*$. Să se arate că $\beta_{m,n} = \beta_{n,m}$ și

$$\beta_{m,n} = \frac{m!n!}{(m+n+1)!} \quad (\text{Funcția } \beta \text{ a lui Euler}).$$

7. Fie șirurile $(a_n)_{n \geq 1}$, $(b_n)_{n \geq 1}$ definite prin:

$$a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx, \quad b_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx, \quad \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

Să se arate că:

a) $a_n = b_n$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$;

b) șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este monoton și mărginit;

c) $a_n = \frac{n-1}{n} a_{n-2}$, $\forall n \in \mathbf{N}, n \geq 3$;

d) $a_{2m} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2m-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2m} \cdot \frac{\pi}{2}$ și $a_{2m+1} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2m}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2m+1)}$,

$\forall n \in \mathbf{N}, n \geq 3$;

e) $n \cdot a_n \cdot a_{n-1} = \frac{\pi}{2}$, $\forall n \in \mathbf{N}, n \geq 2$;

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf_{n \in \mathbf{N}} a_n = 0$, $\sup_{n \in \mathbf{N}} a_n = 1$.

8. Fie $a_{n,m} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cos^m x dx$, $m, n \in \mathbf{N}^*$. Să se arate că:

a) $a_{n,m} = a_{m,n}$, $\forall m, n \in \mathbf{N}^*$;

b) $a_{n,m} = \frac{m-1}{n+1} a_{n+2,m-2}$;

c) $a_{n,m} = \begin{cases} \frac{(n-1)!!(m-1)!!}{(n+m)!!} \cdot \frac{\pi}{2}, & m, n \text{ pare} \\ \frac{(n-1)!!(m-1)!!}{(n+m)!!}, & \text{î n restul cazurilor} \end{cases}$

9. Să se calculeze:

a) $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \sin nx dx$, $n \in \mathbf{N}^*$;

b) $b_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \cos nx dx$, $n \in \mathbf{N}^*$.

10. Să se calculeze:

a) $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \sin nx dx$, $n \in \mathbf{N}^*$;

b) $b_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cos nx dx$, $n \in \mathbf{N}^*$.

11. Să se verifice egalitățile:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \cos(n+2)x dx = 0$, $n \in \mathbf{N}^*$;

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \sin(n+2)x dx = \frac{1}{n+1}$, $n \in \mathbf{N}^*$;

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cos(n+2)x dx = -\frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n+1}$, $n \in \mathbf{N}^*$;

d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \sin(n+2)x dx = \frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{n+1}$, $n \in \mathbf{N}^*$.

12. Să se calculeze:

a) $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \cos nx dx$, $n \in \mathbf{N}^*$;

b) $b_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \sin nx dx$, $n \in \mathbf{N}^*$;

c) $c_{m,n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \sin^n x dx$, $m, n \in \mathbf{N}^*$.

13. Fie șirul $(a_n)_{n \geq 1}$, unde $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos nx}{1+\cos x} dx$, $n \in \mathbf{N}^*$. Să se arate că

$$a_n + a_{n-2} = \frac{2}{n-1} \sin \frac{(n-1)\pi}{2} - 2a_{n-1}, \quad \forall n \in \mathbf{N}, n \geq 3.$$

14. Fie șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ definit prin: $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^n x \, dx$, $n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că

- a) $a_n + a_{n-2} = \frac{1}{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$;
 b) $a_n > a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$;
 c) $\frac{1}{2n+2} < a_n < \frac{1}{2n-2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$;
 d) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

15. Să se calculeze $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^{2n} x \, dx$, $n \in \mathbb{N}^*$.

16. Să se calculeze $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} \right)^{2n+1} dx$, $n \in \mathbb{N}^*$.

17. Să se calculeze:

a) $a_{m,n} = \int_a^b (x-a)^m (b-x)^n dx$, $m, n \in \mathbb{N}^*$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$;

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_a^b (x-a)^n (b-x)^n dx \right)^{1/n}$. (Adm. Facultatea de Matematică 1986)

18. Să se verifice egalitățile:

a) $\int_0^1 x^m (1-x)^n dx = \frac{m! \cdot n!}{(m+n+1)!}$, $m, n \in \mathbb{N}^*$;

b) $\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2} C_n^1 + \frac{1}{m+3} C_n^2 - \dots + (-1)^n \frac{1}{m+n+1} C_n^n = \frac{m! \cdot n!}{(m+n+1)!}$;

c) $\int_0^1 (1-x^2)^n dx = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} 2^{2n}$, $n \in \mathbb{N}^*$;

d) $\int_0^a (a^2 - x^2)^n dx = a^{2n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x \, dx$, $n \in \mathbb{N}^*$, $a > 0$, $a \in \mathbb{R}$;

e) $\int_a^b (x-a)^n (b-x)^n dx = 2 \left(\frac{b-a}{2} \right)^{2n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x \, dx$, $n \in \mathbb{N}^*$.

19. Dacă $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sunt două funcții de n ori derivabile și cu derivatele de ordin n continue pe $[a, b]$ atunci $\int_a^b f(x) g^{(n)}(x) dx = [f(x) g^{(n-1)}(x) - f'(x) g^{(n-2)}(x) + \dots + (-1)^{n-1} f^{(n-1)}(x) g(x)] \Big|_a^b + (-1)^n \int_a^b f^{(n)}(x) g(x) dx$, $n \in \mathbb{N}$.

$n \geq 2$. (Formula generalizată a lui Leibniz.)

20. Fie $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ o funcție continuă și $a_n = \int_0^1 f^n(x) dx$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Să se arate că $a_{n-1}^2 \leq a_n a_{n-2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.

21. Fie $f_n : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ un șir de funcții definit prin $f_1(x) = 1$, $f_{n+1}(x) = \int_1^x f_n(t) dt$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(2) = 0$.

22. Fie $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ o funcție continuă. Definim șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ astfel încât $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \int_0^{a_n} f(t) dt$; să se studieze convergența șirului $(a_n)_{n \geq 1}$.

23. Să se demonstreze că dacă $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă și șirul $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_n = \int_0^1 f(n+t) dt$ este convergent, atunci și șirul $(b_n)_{n \geq 1}$,

$b_n = \int_0^n f(nt) dt$ este convergent și $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

24. Dacă $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ și $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă astfel încât:

$$|f(x)| \leq \left| \int_a^x f(t) dt \right|; \quad \forall x \in [a, b], \text{ atunci } f(x) = 0, \quad \forall x \in [a, b].$$

(O.M. etapa finală, 1985)

25. Se consideră funcția $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, dată prin relația

$$f(x) = \int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt.$$

a) Să se arate că funcția f este pozitivă și descrescătoare pe $[1, +\infty)$.

b) Să se stabilească relația $f(x+1) = x f(x) - \frac{1}{e}$.

c) Să se arate că $\forall n \in \mathbb{N}$ are loc egalitatea $f(n+1) = n! - \frac{1}{e} \sum_{k=0}^n A_n^k$.

d) Folosind cele stabilite anterior să se arate că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ cu termenul

general $a_n = n! - \frac{1}{e} \sum_{k=0}^n A_n^k$ este convergent. (O.M. etapa județeană, 1973)

26. Fie funcția $F_n : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $F_n(x) = \int_0^x t^n e^{-t} dt$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) x fiind dat, să se găsească o relație între $F_n(x)$ și $F_{n+1}(x)$.

b) Să se determine $a_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} F_1(x)$.

c) Să se demonstreze prin inducție că există limita $a_n = \lim_{x \rightarrow \infty} F_n(x)$,

$\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Să se exprime a_n în funcție de n și să se interpreteze geometric rezultatul.

27. Se dă $a_n = \int_0^1 x^n \sin \pi x \, dx$, $n \in \mathbf{N}^*$. Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 a_n$.

28. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ definit prin relația $x_n = \int_0^1 t^n \sin t \, dt$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

a) Să se arate că șirul este monoton și mărginit și să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

b) Să se stabilească o relație de recurență pe care o verifică șirul $(x_n)_{n \geq 1}$.

(Admitere Facultatea de Matematică 1992, Iași)

CAPITOLUL V

UTILIZĂRI ALE ȘIRURILOR RECURENTE ÎN INFORMATICĂ

§ 1. Introducere în proiectarea și analiza algoritmilor

1.1 Descrierea algoritmilor

Noțiunea de algoritm ocupă un loc central în informatică deoarece rezolvarea unei probleme folosind calculatorul presupune elaborarea în prealabil a unui algoritm care rezolvă problema respectivă.

Trecerea de la formularea problemei la specificarea algoritmului în limbajul de programare ales se descompune în două faze și anume:

1) Algoritmii sunt descriși mai întâi într-o formă parțial standardizată și independentă într-o oarecare măsură de limbajul de programare și de calculatorul ce vor fi folosite, deci se elaborează un *algoritm abstract*, suficient de detaliat;

2) Aceste descrieri de algoritmi sunt transformate apoi în programe în limbajul de programare ales, pentru execuție pe un anumit calculator.

Efortul intelectual major este necesar în prima fază, adică în conceperea unui algoritm abstract suficient de detaliat, fază numită *proiectarea algoritmilor*, care nu trebuie împovărată prin trăsăturile specifice ale unui limbaj de programare.

O problemă deosebit de importantă este reprezentarea algoritmilor într-un mod natural, elegant și ușor de înțeles, numită *descrierea algoritmilor*. Descrierea algoritmilor presupune descrierea datelor, a acțiunilor algoritmului și a modului de execuție a acțiunilor.

Principiul modularității și programării structurate asigură un cadru metodologic adecvat pentru descrierea algoritmilor abstracti.

Procedurile sunt utilizate în proiectarea algoritmilor pentru a defini *instrucțiuni abstracte* în sensul de complexe. Orice instrucțiune abstractă poate fi implementată ca un *apel de procedură*, procedura fiind în fond secvența de instrucțiuni care reprezintă detalierea sau rafinarea instrucțiunii abstracte corespunzătoare.

Pentru a defini *expresii abstracte* pot fi utilizate *funcții*. Urmând definiția matematică a unei funcții, în scopul de a defini o funcție este necesar să specificăm domeniul, codomeniul și o regulă care pentru o valoare dată a tipului domeniu determină în mod unic valoarea corespunzătoare a tipului codomeniu. Această regulă este dată printr-un algoritm care este descris într-o formă foarte similară unei declarații de procedură și constituie declarația sau descrierea funcției. Partea de instrucțiuni din descrierea funcției trebuie să conțină măcar o instrucțiune de atribuire cu numele funcției în stânga semnului de atribuire. Un apel de funcție este parte componentă a unei expresii și anume poate apare în orice expresie pe locul unde este necesară o valoare de același tip cu rezultatul furnizat de funcție. Orice procedură care furnizează un singur rezultat poate fi descrisă ca o funcție, rezultatul obținut prin execuția instrucțiunilor ce constituie descrierea funcției fiind disponibil în zona de memorie asociată numelui funcției. Orice funcție poate fi descrisă ca o procedură.

Pentru ca o procedură sau funcție să poată fi executată pe variabile diferite, secvența de instrucțiuni din descrierea acestora trebuie să utilizeze variabile care descriu prelucrările din punct de vedere formal, fiind numite din acest motiv *parametrii formali*; aceștia apar în lista parametrilor formali în linia de antet a procedurii sau funcției sub forma:

procedure P ($pf_1, pf_2, \dots, pf_n$);

function F ($pf_1, pf_2, \dots, pf_n$);

unde $pf_1, pf_2, \dots, pf_n$ desemnează parametrii formali.

Lista parametrilor formali poate fi vidă.

Fiecare apel al unei proceduri sau funcții cu parametri formali trebuie să precizeze parametrii actuali corespunzători, adică variabilele care reprezintă datele de intrare și de ieșire ale algoritmului reprezentat prin acea procedură, respectiv datele de intrare pentru algoritmul reprezentat prin acea funcție. Corespondența între parametrii actuali și cei formali se face prin poziția lor în listele corespunzătoare. Efectul unui apel este același cu execuția algoritmului corespunzător procedurii sau funcției după ce parametrii formali sunt înlocuiți sau substituiți prin parametrii actuali corespunzători.

Sunt posibile mai multe mecanisme de substituție: prin valoare, prin variabilă și prin nume sau referință, după cum parametrii formali sunt de tip valoare, variabilă și proceduri sau funcții.

Ca regulă generală, parametrii formali date de intrare sunt de tip valoare iar parametrii formali date de ieșire sunt de tip variabilă. Există însă cazuri când excepții de la această regulă sunt necesare pentru economie de memorie și / sau timp de execuție.

Limbajul de descriere a algoritmilor folosit în acest capitol va fi un limbaj pseudocod care are construcțiile întâlnite în limbajul PASCAL.

Pseudocodul

Limbajele convenționale de tip pseudocod reprezintă instrumente naturale și comode de descriere structurată a algoritmilor. Descrierile algoritmilor în pseudocod iau forma unor texte numite programe, segmente de program sau subprograme de tip procedură sau funcție. Structura acestor texte respectă următoarele convenții:

1. Prima linie a textului constituie antetul descrierii și poate avea una din formele:

program nume_program;

procedure nume_procedură ($pf_1, pf_2, \dots, pf_n$);

function nume_funcție ($pf_1, pf_2, \dots, pf_n$): tip_funcție;

2. Linia de antet este urmată opțional de specificația algoritmului.

Specificația unui algoritm descrie concis ce face algoritmul și are forma unui comentariu. Facem convenția ca parantezele acolade să delimiteze comentariile, oriunde vor apărea în descrierea algoritmilor. Specificația unui algoritm este un lucru esențial deoarece noi nu putem compara între ei decât algoritmi care au aceeași specificație sau eventual algoritmi a căror specificații diverg doar în câteva cazuri particulare cunoscute și repertoriate; ea constituie baza de pornire în demonstrarea corectitudinii parțiale a algoritmilor.

Specificația unui algoritm se dă într-o formă mai mult sau mai puțin formalizată folosind fraze de limbaj natural și/sau formule matematice sau logice. Când specificația unui algoritm se dă numai prin formule se numește specificație formală. Specificația unui algoritm trebuie să fie clară, precisă, concisă și completă.

3. *Descrierea propriu-zisă a algoritmului* se face pe linii succesive ce urmează specificației algoritmului, iar când aceasta lipsește, urmează liniei de antet și constituie blocul de descriere a algoritmului. Un bloc constă din două părți (secțiuni): prima conține descrierea datelor algoritmului iar a doua descrie acțiunile acestuia și ordinea lor de execuție.

Prima secțiune din blocul de descriere a unui algoritm în pseudocod mai este referită ca *partea de declarații* și conține definiții de tipuri și declarare a constantelor, variabilelor, procedurilor și funcțiilor (precizarea tipului datelor se face adesea prin așa-numita declarare a variabilelor). Uneori declararea tipului prezintă un interes special, caz în care precede declararea variabilelor. În partea de declarație a blocului procedurilor se specifică variabilele locale acestora. De fapt, în pseudocod, nu există o formă standard în care se dau informații asupra tipurilor și structurilor de date utilizate de algoritm și de cele mai multe ori ele vor fi cuprinse în specificația algoritmului.

A doua secțiune din blocul de descriere a algoritmului în pseudocod descrie acțiunile acestuia și ordinea lor de execuție și are forma generală:

begin

instrucțiuni

end.

Blocul unei funcții trebuie să conțină descrierea modului de calcul a rezultatului și măcar o instrucțiune de forma *nume_funcție := rezultat_calculat*. Instrucțiunile se separă între ele prin ; și pot fi simple sau compuse. Instrucțiunile simple descriu acțiuni elementare ale algoritmului sau implementează structuri de control alternative (selecția) și repetitive (iterația). Instrucțiunile compuse implementează structura secvențială (secvența) și pot fi părți componente ale altor structuri.

O instrucțiune compusă este delimitată de cuvintele **begin** și **end** și este considerată ca o acțiune singulară dar complexă. Utilizarea structurilor de control ale programării structurate permite obținerea unor structuri ierarhizate oricât de complexe și descrierea structurată în pseudocod a algoritmilor.

4. *Declarații* (constante, variabile, tipuri). Dacă se omite partea de declarații a blocului programului se obține un segment de program: partea de instrucțiuni a blocului (fără instrucțiuni de intrare-ieșire) precedată de specificația algoritmului.

5. *Descrierea acțiunilor* elementare (simple) ale unui algoritm se realizează în pseudocod prin următoarele instrucțiuni:

– instrucțiunea *de atribuire*, având una din formele:

$x := c, x := y, x := \text{expresie},$

unde c este o constantă, y o variabilă și există compatibilitate între tipul variabilei

x și cel al elementului specificat în partea dreaptă a simbolului de atribuire;

- instrucțiunea **if** sau **case** pentru acțiunea de decizie (detalii la implementarea structurii de control alternative);
- instrucțiunea **read** pentru acțiunea de introducere a datelor inițiale;
- instrucțiunea **write** pentru acțiunea de extragere a datelor finale;
- instrucțiunea **go to** pentru acțiunea de salt;
- instrucțiunea **call** nume_procedură ($pa_1, pa_2, \dots, pa_n$) pentru acțiunea de apel de procedură, unde $pa_1, pa_2, \dots, pa_n$ sunt parametrii actuali ai apelului iar cuvântul **call** este opțional.

6. Implementarea structurilor de control ale programării structurate.

- structura secvențială (secvența). Instrucțiunea compusă:

begin

instr A ; instr B ; ... instr X

end

implementează secvența $A; B; \dots X$. Se recomandă o aliniere pe verticală a instrucțiunilor ce compun secvența.

- structura alternativă (selecția) este implementată prin instrucțiunile:

a) **if** condiție

then A_1

else A_2 ;

b) **if** condiție then A ;

c) **case** (expresie)

$v_1 : A_1$;

$v_2 : A_2$;

.....

$v_n : A_n$;

echivalentă cu **if** expresie = v_1

then A_1 ;

else **if** expresie = v_2

then A_2 ;

else ...;

unde $A, A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ desemnează instrucțiuni simple sau compuse iar $v_1, v_2, \dots, v_n$ sunt valori ale expresiei care determină acțiuni distincte ale algoritmului într-un moment precizat al execuției sale. În construcțiile de tip **if** instrucțiunile A_1 , respectiv A se execută când condiția are valoarea **true** iar instrucțiunea A_2 când condiția are valoarea **false**.

De pe oricare ramură a structurii alternative după execuția instrucțiunii specificate se continuă cu instrucțiunea ce urmează instrucțiunii **if** sau **case** în secvența de instrucțiuni din descrierea algoritmului.

Structura repetitivă (iterația) este implementată prin instrucțiunile:

for $v := v_i$ to v_f [step p] **do** A ; (pentru pas pozitiv)

for $v := v_i$ downto v_f [step p] **do** A ; (pentru pas negativ)

Implicit pasul are valoarea 1.

while C **do** A ;

repeat

$A_1; A_2; \dots; A_n$

until C ;

unde v este variabila de control a ciclului **for**, v_i și v_f sunt respectiv valoarea inițială și finală a variabilei de control, iar p este pasul; C reprezintă o expresie în starea **true** (pentru valoarea **false** se specifică not C).

Exprimarea unor instrucțiuni prin construcții echivalente bazate pe alte instrucțiuni prezintă interes la implementarea descrierilor algoritmilor în pseudocod folosind limbaje de programare care nu dispun de implementări directe ale tuturor instrucțiunilor pseudocod prezentate aici.

Instrucțiunile care descriu în pseudocod prelucrările realizate de către un algoritm pot fi aliniate sau decalate în cadrul textului prin procedeul indentării permițând sesizarea structurii ierarhice a algoritmului descris.

Indentarea face o descriere mai clară evidențiind structura ierarhică a instrucțiunilor prin utilizarea noțiunii de *nivel*. Programul, procedura sau funcția se consideră o instrucțiune I de nivel 0 sau o secvență de instrucțiuni de nivel 1. Instrucțiunile componente ale unei instrucțiuni de nivel j vor avea nivelul $j + 1$. Componentele v_i ale unei secvențe **begin** $v_1, v_2, \dots, v_n$ **end**; de nivel j au toate același nivel j . Prin procedeul indentării instrucțiunile de pe același nivel încep pe linii diferite fiind aliniate la aceeași coloană iar instrucțiunile unui nivel vor fi decalate către dreapta cu câteva coloane față de nivelul ierarhic superior (instrucțiunile nivelului $j + 1$ vor fi decalate către dreapta în raport cu instrucțiunile nivelului j). Tot prin procedeul indentării instrucțiunile **if**, **case**, **for**, **while** și **repeat** au unele componente aliniate și altele decalate. Indentarea este recomandată întotdeauna în descrierea algoritmilor în pseudocod deoarece face textul mai ușor de citit și de înțeles. În faza de testare a unor algoritmi complecși scrierea indentată facilitează depistarea unor erori și efectuarea unor modificări cu efect mai ușor de controlat. Dar indentarea trebuie folosită cu discernământ întrucât mărește descrierea (numărul de linii ale textului). Multe medii de programare conțin însă *utilitare de compactare* care elimină spațiile introduse prin procedeul indentării la memorarea descrierii pe un suport fizic.

Comentariile pot fi de asemenea utilizate în descrierea algoritmilor în pseudocod cu condiția să fie scurte, să se limiteze la explicarea ideilor esențiale și să fie plasate potrivit, evidențiind punctele semnificative.

În descrierea algoritmilor în pseudocod noi vom folosi indentarea și comentariile. Vom folosi uneori instrucțiuni suplimentare pentru a simplifica descrierea algoritmilor și anume:

- *instrucțiunea de schimb* între două variabile: $x \longleftrightarrow y$ cu semnificația: x primește vechea valoare a lui y și y primește vechea valoare a lui x . Această instrucțiune necesită o variabilă auxiliară ascunsă t și este echivalentă cu trei

instrucțiuni de atribuire:

$t := x;$ $t := y;$
 $x := y;$ sau $y := x;$
 $y := t;$ $x := t.$

– *instrucțiune de ieșire din buclă*: **exit**.

Permite ieșirea din bucla cea mai interioară.

– *instrucțiunea de ieșire dintr-o procedură*: **return** sau *dintr-o funcție*: **return** (valoare-rezultat).

În cazul unei proceduri instrucțiunea **return** provoacă abandonul procedurii și reluarea execuției algoritmului care a apelat procedura cu instrucțiunea care urmează apelului. În cazul unei funcții se abandonează apelul și se reia evaluarea expresiei folosind valoarea rezultatului funcției precizată în argumentul instrucțiunii **return** (valoare-rezultat).

Facem, de asemenea, precizarea că operatorii **and** și **or** folosiți în construcția condițiilor din instrucțiunile **if**, **while**, **repeat** sunt secvențiali, în sensul că **A and B** este echivalentă cu **if A then false else B** iar **A or B** este echivalent cu **if A then true else B**. Aceasta înseamnă că al doilea operand nu este evaluat când evaluarea primului operand permite să se determine rezultatul.

În descrierile algoritmilor utilizând pseudocodul (și de asemenea în schemele logice) vom evita pe cât posibil salturile. Este un fapt dovedit că salturile pot fi întotdeauna evitate utilizând buclele (instrucțiunile **while**, **repeat**, **for**), instrucțiunile condiționale (**if-then-else**, **if-then, case**) sau procedurile. Totuși există situații când neutilizarea salturilor face descrierea mai puțin inteligibilă, motiv pentru care am extins setul de instrucțiuni utilizabile autorizând instrucțiunile **exit** și **return**.

1.2 Elemente de analiză a complexității algoritmilor

Pentru a executa un algoritm pe calculator el trebuie descris într-un limbaj de programare. Execuția unui algoritm presupune un *consum de timp* impus de execuția operațiilor din instrucțiunile algoritmului și eventual de transferul de informații din exteriorul calculatorului (memoria externă) în memoria internă și *ocuparea unui spațiu de memorie* pentru memorarea datelor și instrucțiunilor programului.

Scopul analizei complexității algoritmilor este de a stabili rezultate generale ce permit a estima eficacitatea metodei utilizate de un algoritm pentru rezolvarea unei probleme independent de calculator, de limbajul de programare și de toate detaliile de implementare. Există mai multe criterii de evaluare a eficienței unui algoritm: timpul de execuție, memoria ocupată, simplitatea și claritatea structurii, configurația structurării datelor utilizate de un algoritm. Analiza complexității algoritmilor vizează în principal măsura complexității timp și măsura complexității memoriei ocupate (complexitatea spațiu).

1. Complexitatea timp

Pentru a simplifica evaluarea complexității timp a unui algoritm se vor lua în considerație numai anumite operații numite *operații fundamentale*, astfel că timpul total de execuție al algoritmului este întotdeauna proporțional cu numărul acestor operații.

Deci primul lucru ce trebuie făcut în analiza complexității unui algoritm este alegerea operațiilor fundamentale. Operațiile fundamentale variază în raport cu clasa algoritmilor studiați. Există o clasă foarte largă de algoritmi numerici pentru care operațiile fundamentale sunt adunarea și înmulțirea, analiza complexității timp a acestor algoritmi necesitănd evaluarea numărului de adunări, respectiv de înmulțiri, scăderea fiind privită ca o adunare, iar împărțirea ca o înmulțire. Din această clasă fac parte algoritmul lui Horner pentru evaluarea unui polinom, înmulțirea matricilor, calculul unui determinant, rezolvarea directă a unui sistem liniar (metoda lui Gauss).

O altă clasă importantă este cea a algoritmilor numerici de aproximare succesivă numiți și *iterativi* pentru care operația fundamentală este numărul de evaluări de funcții pe pas de iterație și permite să se compare diferite metode iterative bazate pe aceeași funcție. Din clasa algoritmilor iterativi fac parte spre exemplu algoritmi de aproximare a rădăcinilor unei ecuații, a radicalului de ordinul n .

O pondere importantă în aplicațiile informatice o au problemele nenumerice. Dintre aceste probleme nenumerice mai des sunt tratate probleme de căutare și sortare în liste. Pentru algoritmi de căutare operația fundamentală este aceea de comparație între cheia căutată și cheile din lista în care are loc căutarea. Pentru algoritmi de sortare se utilizează două operații fundamentale: comparația dintre două chei componente ale listei și transferurile de chei în vederea aranjării în ordinea dorită. Când datele de sortat nu încap complet în memoria internă fiind memorate pe suport extern sunt folosiți algoritmi de sortare externă pentru care operațiile fundamentale sunt: transferurile de chei între memoria externă și memoria internă și comparația între două chei.

De îndată ce operațiile fundamentale au fost determinate se trece la evaluarea funcției de complexitate prin numărarea operațiilor fundamentale de fiecare tip. Nu există un sistem complet de reguli pentru a evalua numărul de operații fundamentale bazat pe sintaxa algoritmilor dar se acceptă anumite convenții pentru structurile de bază; notând cu $P(X)$ numărul de operații fundamentale pentru instrucțiunea X (simplă sau compusă) vom folosi convențiile:

1. $P(\text{begin } A; B \text{ end}) = P(A) + P(B);$
2. $P(\text{if } C \text{ then } A \text{ else } B) \leq P(C) + \max(P(A), P(B));$
3. Dacă X este o iterație, $P(X) = \sum P(i)$, unde $P(i)$ este numărul de operații

fundamentale executate în a i -a iterație. Se pune problema evaluării numărului de iterații pentru a cunoaște marginile lui i . La iterațiile de tip **for** numărul de iterații este cunoscut; la iterațiile de tip **while** și **repeat** ne mulțumim adesea cu un majorant pentru numărul de iterații care ar putea fi efectuat.

Complexitatea timp a unui algoritm depinde de volumul datelor și pentru un volum fixat de date, depinde în general de diferitele configurații posibile ale datelor. De aceea în analiza complexității timp a algoritmilor se folosesc mai multe *măsuri de complexitate*: complexitatea în cazul cel mai favorabil, complexitatea în cazul cel mai nefavorabil și complexitatea medie.

Pentru a defini aceste măsuri de complexitate notăm cu D_n ansamblul datelor de dimensiune n și cu $\text{cost}_A(d)$ complexitatea algoritmului A pentru datele de intrare d .

Complexitatea în cazul cel mai favorabil este definită prin $\text{Min}_A(n) = \min(\text{cost}_A(d)), d \in D_n$, iar complexitatea în cazul cel mai nefavorabil prin $\text{Max}_A(n) = \max(\text{cost}_A(d)), d \in D_n$. $\text{Max}_A(n)$ este o măsură foarte utilă fiind o margine superioară a timpului de execuție al algoritmului. Definirea lui $\text{Med}_A(n)$ necesită un model probabilistic.

Notăm cu $M_A(n)$ măsura complexității timp în analiza unui algoritm particular A pe date de volum n . Prezintă adesea interes ordinul de mărime al lui $M_A(n)$ mai degrabă decât funcția $M_A(n)$ însăși, adică o funcție care are o viteză de creștere apropiată celei a lui $M_A(n)$ când volumul datelor crește, funcție numită *complexitatea asimptotică* a algoritmului A . Este suficient să se determine ordinul de mărime a complexității algoritmilor pe date de volum mare pentru a putea pe de o parte să comparăm între ei algoritmi diferiți care rezolvă aceeași problemă și pe de altă parte să putem evalua dimensiunea maximă a problemei ce poate fi rezolvată de către un algoritm.

Studiul comportării asimptotice a complexității algoritmilor se bazează pe următoarele definiții:

Definiția 1. Fie f și g două funcții de la $\mathbf{N}$ în $\mathbf{R}_+$; $f = O(g)$ dacă și numai dacă $\exists c \in \mathbf{R}_+, \exists n_0 \in \mathbf{N}$ astfel încât $\forall n > n_0, f(n) \leq c \cdot g(n)$. Se spune atunci că f este de ordin de mărime asimptotic inferior sau egal celui al lui g sau că f este dominată asimptotic de g .

Definiția 2. Fie f și g două funcții de la $\mathbf{N}$ în $\mathbf{R}_+$;

$f = \Theta(g) \Leftrightarrow \exists c, d \in \mathbf{R}_+, \exists n_0 \in \mathbf{N}$ astfel încât

$\forall n > n_0, d \cdot g(n) \leq f(n) \leq c \cdot g(n) \Leftrightarrow f = O(g) \text{ și } g = O(f)$.

Se zice atunci că f și g au același ordin de mărime asimptotică.

§ 2. Algoritmi recursivi

2.1 Relații de recurență și algoritmi recursivi asociați

Relațiile de recurență reprezintă definiții recursive de funcții. O definiție recursivă a unei funcții trebuie să satisfacă următoarea condiție de consistență: valoarea funcției trebuie să fie ori direct calculabilă ori calculabilă cu ajutorul unor valori direct calculabile.

Iată câteva exemple ilustrative simple de definiții recursive de funcții:

- Funcția $FAC: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ $\{FAC(n) = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n\}$

$$FAC(n) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } n = 0, \\ n \cdot FAC(n-1), & n > 0. \end{cases} \quad (1)$$

- Funcția Fibonacci, $FIB: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ {șirul Fibonacci}

$$FIB(n) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } n = 0 \text{ sau } n = 1, \\ FIB(n-2) + FIB(n-1), & n > 1. \end{cases} \quad (2)$$

Definițiile recursive descriu procesul calculului valorilor funcțiilor pe care le definesc și pot fi exprimate cu ajutorul unui enunț de forma *if-then-else*, după cum urmează:

$FAC(n) = \text{if } n = 0 \text{ then } 1 \text{ else } n \cdot FAC(n-1),$

$FIB(n) = \text{if } n = 0 \text{ or } n = 1 \text{ then } 1 \text{ else } FIB(n-2) + FIB(n-1).$

Definițiile recursive pot fi clasificate după modul în care descriu procesul calculului valorilor funcției pe care le definesc.

Cele mai comune forme ale definițiilor recursive sunt:

recursia liniară și recursia neliniară de tip cascadă.

Forma generală a recursiei liniare este:

$f(x) = \text{if } p(x) \text{ then } g(x) \\ \text{else } \varphi(f(h(x)), i(x)) \quad (3)$

O formă particulară a definiției (3) este:

$f(x) = \text{if } p(x) \text{ then } g(x) \\ \text{else } f(h(x)) \quad (3')$

care se numește iterativă sau repetitivă.

Definiția (1) a funcției *factorial* este un exemplu de recursie liniară.

Recursiile neliniare de tip cascadă sunt de forma:

$f(x) = \text{if } p(x) \text{ then } g(x) \\ \text{else } \varphi(f(h(x)), f(i(x))) \quad (4)$

Definiția (2) este un exemplu caracteristic de recursie cascadă.

Calculul valorilor funcțiilor definite prin relații de recurență și prin urmare, calculul elementelor șirurilor recurente se poate realiza cu ajutorul calculatorului folosind algoritmi recursivi.

Un algoritm este recursiv dacă își realizează activitatea pe o mulțime de date D folosind algoritmul însuși pe o submulțime a lui D sau pe o partiție a lui D .

Descrierea unui algoritm recursiv se face sub formă de subprogram: procedură sau funcție recursivă. Un program se numește recursiv dacă folosește unul sau mai mulți algoritmi recursivi.

Recursia constituie o tehnică importantă de proiectare a algoritmilor, dar pentru a fi folosită eficient trebuie să fie bine înțeles modul în care lucrează și de asemenea unde și când este utilizabilă. Utilizarea recursiei cere o grijă deosebită ca să nu avem un volum mare de date și să avem o condiție de terminare dată de execuția algoritmului asupra unei date elementare ce poate fi calculată direct.

O procedură P se zice recursivă dacă execuția sa poate provoca unul sau mai multe apeluri ale lui P . Aceste apeluri se numesc apeluri recursive. Apelul procedurii care se produce atunci când aceasta nu este deja un curs de execuție se numește *apel principal*.

Analog se definește o funcție recursivă și apelurile recursive corespunzătoare. Întrucât orice algoritm descris ca o funcție poate fi descris de asemenea sub formă de procedură, în continuare vom trata algoritmi recursivi sub forma procedurilor recursive.

Distingem :

- recursivitate simplă sau directă când toate apelurile recursive apar în corpul procedurii însăși;
- recursivitate încrucișată când apelurile recursive sunt provocate prin execuția altor proceduri apelate în corpul procedurii recursive. Spre exemplu, corpul procedurii P conține un apel al unei proceduri Q al cărei corp conține un apel al procedurii P .

Vom trata doar cazul recursiei directe care este cel mai frecvent în practică. Tratarea recursiei încrucișate nu prezintă dificultăți deosebite.

Recursia permite o exprimare concisă a algoritmilor și ușurează analiza lor.

Algoritmi recursivi care calculează funcții recursive pot fi descriși ca funcții recursive sau proceduri recursive echivalente din punct de vedere funcțional cu acestea:

```
function FAC (x: integer): integer;
begin
  if x = 0 then FAC := 1
  else FAC := x * FAC (x - 1)
```

```
end;
```

```
procedure FAC (x: integer; var f: integer);
```

```
var y: integer;
```

```
begin
```

```
  if x = 0 then f := 1
```

```
  else begin
```

```
    FAC (x - 1, y)
```

```
    f := x * y
```

```
  end
```

```
end;
```

```
function FIB (x: integer): integer;
```

```
var y1, y2: integer;
```

```
begin
```

```
  if (x = 0) or (x = 1) then FIB := 1
```

```
  else begin
```

```
    y1 := FIB (x - 1);
```

```
    y2 := FIB (x - 2);
```

```
    FIB := y1 + y2;
```

```
  end
```

```
end;
```

```
procedure FIB (x: integer; var f: integer);
```

```
var y1, y2: integer;
```

```
begin
```

```
  if (x = 0) or (x = 1) then f := 1
```

```
  else begin
```

```
    FIB (x - 1, y1);
```

```
    FIB (x - 2, y2);
```

```
    f := y1 + y2
```

```
  end
```

```
end;
```

Mulțimea valorilor furnizate de un algoritm recursiv ce calculează termenii unui șir recurent particular poate ușura identificarea sau verificarea proprietăților acelui șir recurent.

Execuția unui algoritm recursiv folosește o stivă „ascunsă” numită stivă de execuție. Orice apel recursiv crește stiva de execuție prin memorarea următoarelor informații:

Variabile locale
Adresa de întoarcere
Parametri de tip valoare
Valoare finală a funcției recursive

Fig. 1. Zona stivă a unui apel recursiv

Apelurile de proceduri recursive sunt oarecum mai simple deoarece spațiul stivă alocat pentru un apel de procedură cuprinde doar spațiul pentru parametri valoare, spațiu pentru adresa de revenire și spațiu pentru variabilele locale.

Pentru parametrii de tip variabilă modificările sunt făcute în locațiile de memorie ale variabilelor originale.

Observația 1. Se poate ține urma apelurilor recursive cu ajutorul calculatorului, plasând instrucțiuni de scriere „informative”, una imediat după **begin** și una înainte de **end** în corpul procedurii sau funcției recursive. Această metodă de trasare a urmei procesului recursiv constituie un mijloc eficient atât pentru înțelegerea acestuia cât și pentru punerea la punct a programelor care utilizează recursia.

Observația 2. Când este folosită recursia trebuie avută o grijă deosebită pentru a furniza condiții de terminare în scopul opririi apelurilor recursive. Dacă aceste condiții de terminare nu sunt puse, este foarte ușor de a intra într-o buclă infinită cu implicații asupra stivei de execuție. Particularitățile procesului recursiv și structura stivei de execuție impun folosirea corectă și eficientă a stivei de execuție. Aceasta se bazează pe următoarele observații privind substituirea prin valoare și prin variabilă în contextul utilizării recursiei și privind caracterul local sau global al variabilelor.

a) Dacă valorile precedente ale unui parametru sunt necesare când execuția se întoarce prin apelurile recursive precedente atunci parametrul trebuie declarat ca un parametru valoare.

b) Când nu există instrucțiuni executabile care urmează apelului recursiv, deci nu e nevoie să folosim în nici un fel o valoare-memorată în stivă pentru parametrii de tip valoare când execuția se întoarce prin fiecare apel precedent, parametrii valoare respectivi se pot declara de tip variabilă, folosind astfel mai eficient stiva de execuție.

c) În multe cazuri este posibil să optimizăm recursia manipulând parametrii prin folosirea procedurilor imbricate sau suprapuse, procedeu cunoscut sub numele de *tehnica procedurii de control*.

2.2 Proiectarea și analiza complexității algoritmilor recursivi

Timpul de execuție al unui apel de procedură recursivă se poate defini ca suma timpului de execuție al corpului procedurii și a timpului de transfer a parametrilor. Timpul de execuție al corpului unei procedurii, numit timpul de execuție al procedurii, se definește ca timpul de execuție al programului iterativ corespunzător părții de instrucțiuni a procedurii, parametrii fiind considerați ca variabile.

În cazul unui apel al unei procedurii recursive, această definiție nu dă direct timpul de execuție, ci o ecuație de recurență a cărei soluție este timpul de execuție.

Spațiul de memorie necesar pentru a executa un apel de procedură recursivă poate fi definit ca spațiul necesar pentru a executa corpul procedurii, plus un spațiu constant (pentru a conține valorile parametrilor valoare și variabilelor locale procedurii, adresele parametrilor variabili și adresa de întoarcere după execuția corpului procedurii).

Nu vom trata decât cazul procedurilor ce nu conțin instrucțiuni de alocare sau de eliberare a zonelor de memorie, altele decât declarațiile de variabile din descrierea procedurii.

Spațiul necesar pentru a executa corpul S al unei procedurii și pentru a păstra valorile variabilelor programului și a parametrilor valoare în momentul apelului, desemnați prin w , este dat prin:

$$N_S(w) = d_0(w) + \text{Max}(N_{b_1}(f_1(w)), \dots, N_{b_n}(f_n(w)), N_{a_1}(f_{n+1}(w)), \dots, N_{a_k}(f_{n+k}(w)))$$

unde:

- d_0 este locul ocupat de variabilele declarate în S (dacă S nu este un bloc, $d_0 = 0$);
- $b_1, \dots, b_n$, ($n \geq 0$), sunt cele n blocuri ale lui S , neimbricate, executate succesiv, pentru w ;
- $a_1, \dots, a_k$, ($k \geq 0$) sunt cele k apeluri ale procedurii, conținute în corpul lui S , dar nu într-un bloc imbricat în S , executate pentru w ;
- $f_1(w), \dots, f_{n+k}(w)$ sunt valorile variabilelor programului și a parametrilor valoare ai procedurii, evaluați respectiv la activarea blocurilor $b_1, \dots, b_n$ și în momentul apelurilor $a_1, \dots, a_k$.

În cazul unui apel al unei procedurii recursive nu se obține direct dimensiunea memoriei necesare, ci o ecuație de recurență a cărei soluție este dimensiunea memoriei.

Tehnici de descompunere recursivă

Pentru rezolvarea unei probleme P , proiectarea unei procedurii recursive se bazează pe:

(a) rezolvarea lui P în anumite cazuri particulare;

(b) alegerea unei descompuneri a lui P în subprobleme de aceeași natură ca P , astfel că descompuneri succesive ajung întotdeauna la unul din cazurile din (a).

Procedura conține atunci:

– instrucțiuni ce rezolvă direct cazurile particulare (a);

– instrucțiuni ce descompun problema în subprobleme și o rezolvă pornind de la soluțiile acestor subprobleme (b);

– apeluri recursive ce rezolvă aceste subprobleme.

Există în general un număr mare de descompuneri posibile ale unei probleme în subprobleme. Vom da câteva reguli pentru a alege o descompunere eficientă. Pentru fiecare descompunere facem o evaluare a timpului de execuție în funcție de dimensiunea problemei. Pentru ca aceste valori să fie comparabile, dimensiunea trebuie să fie definită independent de descompunere.

În fiecare din schemele de descompunere propuse, timpul de execuție al procedurii recursive satisface o ecuație de recurență. Evaluarea timpului de execuție se obține prin *determinarea șirului recurent* ce caracterizează schema de descompunere.

Distingem următoarele cazuri de descompunere:

1. *Reducerea logaritmică*

Presupunem că, pentru a rezolva o problemă de dimensiune n , am avea de ales între următoarele două scheme de descompunere:

(i) Dacă $n > 1$, se rezolvă aceeași problemă de dimensiune $n - 1$ și se efectuează o prelucrare a cărei timp este dat printr-o funcție $f(n)$;

Dacă $n = 1$ se rezolvă direct problema într-un timp c .

Timpul de execuție al procedurii recursive corespunzătoare acestei descompuneri va fi soluția ecuației:

$$T(n) = T(n - 1) + f(n), \quad T(1) = c.$$

Soluția acestei ecuații este $T(n) = c + \sum_{i=2}^n f(i)$.

(ii) Admitem pentru simplificare că $n = 2^k$.

Dacă $n > 1$, rezolvăm aceeași problemă de dimensiune $n / 2$ și efectuăm o prelucrare a cărei timp este dat printr-o funcție $g(n)$; dacă $n = 1$, se rezolvă direct problema într-un timp c .

Timpul de execuție al procedurii recursive corespunzătoare acestei descompuneri va fi soluția ecuației: $T(n) = T(n / 2) + g(n)$, $T(1) = c$.

Cum $n = 2^k$, soluția acestei ecuații este $T(n) = c + \sum_{i=1}^k g(2^i)$.

Dacă funcțiile f și g sunt de același ordin, schema (ii) este preferabilă schemei (i).

Spre exemplu, dacă funcțiile $f(n)$ și $g(n)$ sunt constante, $T(n)$ este de ordinul lui n în cazul (i) și de ordinul lui $\log_2 n$ în cazul schemei (ii).

Alegerea descompunerii (ii) față de descompunerea (i) este deci echivalentă

realizării unei reduceri logaritmice a unui program scris urmând descompunerea (i).

În cazul când n nu este o putere a lui 2, se poate aplica deseori descompunerea (ii) reducând la o problemă a cărei dimensiune este cât mai aproape posibil de $n/2$; timpul de execuție este atunci de același ordin ca și în cazul $n = 2^k$.

2. Alte scheme de descompunere

Presupunem acum că pentru a rezolva o problemă de dimensiune n am avea de ales între următoarele scheme de descompunere:

(i) descompunerea (i) din „reducerea logaritmă”, cu $f(n) = n$.

Timpul de execuție este atunci soluția ecuației:

$$T(n) = T(n-1) + n, \quad T(1) = c,$$

deci soluția $T(n) = c + 2 + 3 + \dots + n$ este de ordinul lui n^2 .

(ii) descompunerea (ii) din „reducerea logaritmă” cu $g(n) = n$ (se presupune că $n = 2^k$):

Dacă $n > 1$, se rezolvă două subprobleme de dimensiune $n/2$ și se efectuează o prelucrare a cărei timp este de ordinul lui n ; dacă $n = 1$, se rezolvă problema direct într-un timp c .

Timpul de execuție este soluția ecuației:

$$T(n) = 2 \cdot T(n/2) + n, \quad T(1) = c,$$

soluție care poate fi determinată astfel:

$$T(2^k) = 2 \cdot T(2^{k-1}) + 2^k$$

$$2 \cdot T(2^{k-1}) = 2^2 \cdot T(2^{k-2}) + 2 \cdot 2^{k-1}$$

$$\dots$$

$$2^i \cdot T(2^{k-i}) = 2^{i+1} \cdot T(2^{k-(i+1)}) + 2^i \cdot 2^{k-i}$$

$$\dots$$

$$2^{k-1} \cdot T(2^{k-(k-1)}) = 2^{k-1} \cdot T(1) + 2^{k-1} \cdot 2^{k-(k-1)}$$

$$2^k \cdot T(1) = 2^k \cdot c$$

De unde $T(2^k) = 2^k \cdot c + k \cdot 2^k$. Deci $T(n)$ este de ordinul $n \log n$ și prin urmare, descompunerea (ii) este preferabilă descompunerii (i), pentru n suficient de mare.

Ca exemple de algoritmi proiectați folosind descompunerile (i) și (ii) din acest al doilea caz putem cita: sortarea prin inserare, căutarea secvențială și Hanoi pentru descompunerea (i) și sortarea prin interclasare, sortarea prin segmentare, căutarea binară standard - folosind descompunerea (ii):

3. Principiul general de descompunere recurentă

Am văzut în cele două cazuri precedente că este preferabil să se descompună o problemă de dimensiune n în două probleme de dimensiuni egale (schema (ii)) decât într-o subproblemă de dimensiune $n-1$ și o subproblemă de dimensiune 1 (schema (i)). Este vorba de un *principiu general*: o descompunere recurentă a unei probleme în subprobleme de dimensiuni egale conduce la *algoritmi eficienți*. Ea constă în a descompune o problemă de dimensiune n ($n > 1$) în a probleme de dimensiuni n/b (în presupunerea că n este o putere a lui b), descompunerea și rezolvarea problemei pornind de la soluția subproblemelor luând un timp dat printr-o funcție $f(n)$. Timpul de execuție a unei proceduri recursive bazată pe acest principiu de descompunere este atunci dat prin ecuația:

$$T(n) = a \cdot T(n/b) + f(n), \quad T(1) = c.$$

Propoziția următoare dă soluția acestei ecuații în cazul în care $f(n)$ este de ordinul lui n .

Propoziția 1. Ecuația $T(n) = aT(n/b) + n$ (cu $n > 1$ și $b > 1$), $T(1) = c$ admite o soluție:

- de ordinul n , dacă $a < b$
- de ordinul $n \log n$, dacă $a = b$
- de ordinul $n^{\log_b a}$, dacă $a > b$.

Demonstrație. În cele ce urmează vom scrie $\log x$ în loc de $\log_b x$.

Presupunem că n este o putere a lui b . Avem:

$$T(n) = a T(n/b) + n$$

$$aT(n/b) = a^2 T(n/b^2) + a \cdot n/b$$

$$\dots$$

$$a^i T(n/b^i) = a^{i+1} \cdot T(n/b^{i+1}) + a^i / b^i \cdot n$$

$$\dots$$

$$a^{\log(n-1)} T(n/b^{\log(n-1)}) = a^{\log n} T(n/b^{\log n}) + a^{\log(n-1)} / b^{\log(n-1)} n$$

$$a^{\log n} T(1) = a^{\log n} c.$$

$$\text{De unde } T(n) = \sum_{i=0}^{\log(n-1)} (a/b)^i + a^{\log n} \cdot c.$$

Dacă $a < b$, atunci $a^{\log n} < n$, și, pe de altă parte, seria $\sum_{i=0}^{\infty} (a/b)^i$ converge. Prin

urmare $T(n)$ este de ordinul lui n .

Dacă $a = b$ atunci $T(n) = n \cdot \sum_{i=0}^{\log(n-1)} 1 + n \cdot c$, deci $T(n)$ este de ordinul $n \log n$.

Dacă $a > b$ atunci $\sum_{i=0}^{\log(n-1)} \left(\frac{a}{b}\right)^i = \frac{(a/b)^{\log n} - 1}{a/b - 1}$ este de ordinul

$(a/b)^{\log n}$, deci $T(n)$ este de ordinul $a^{\log n}$, sau încă $n^{\log a}$.

Toate variantele de descompunere propuse în proiectarea algoritmilor recursivi constituie de fapt variante de utilizare a unei metode generale de proiectare a algoritmilor cunoscută sub numele de *Divide-et-Impera*.

Rezultatele asupra complexității algoritmilor proiectați folosind diferitele scheme de descompunere, obținute prin utilizarea teoriei șirurilor recurente, permit cunoașterea complexității unei mulțimi largi de algoritmi fără a face analiza lor individuală ci numai pe baza identificării schemei de descompunere recursivă ce a stat la baza proiectării lor.

2.3 Tehnica „programării dinamice”

Arborele de execuție a unei proceduri recursive

Este uneori comod de a reprezenta secvența apelurilor recursive și a instrucțiunilor executate prin apelul unei proceduri recursive printr-un arbore construit astfel:

- apelul considerat corespunde rădăcinii arborelui;
 - frunzele arborelui sunt etichetate prin secvențe de instrucțiuni ce nu conțin apelul procedurii; celelalte noduri (vârfuri) sunt etichetate prin apeluri recursive.
- Facem următoarele precizări:
- dacă nici un apel recursiv nu este provocat prin apelul considerat, rădăcina are ca singur succesor o frunză etichetată prin secvența de instrucțiuni executate.
 - dacă cel puțin un apel recursiv este provocat, rădăcina va avea ca succesori, ordonați de la stânga la dreapta:
 - o frunză etichetată prin secvența de instrucțiuni executate înaintea primului apel recursiv;
 - un nod etichetat prin primul apel recursiv la care este reatașat arborele apelurilor corespunzătoare;
 - o frunză etichetată prin secvența de instrucțiuni executate după terminarea primului apel recursiv și înaintea apelului recursiv următor;
 - un nod etichetat prin apelul recursiv următor la care este reatașat arborele apelurilor corespunzătoare;
 - ...
 - o frunză etichetată prin secvența de instrucțiuni executate după terminarea tuturor apelurilor recursive, provocate prin apelul considerat (ce etichetează rădăcina).

Calculul unei proceduri recursive pentru un apel principal

Considerăm:

- o procedură recursivă ale cărei teste nu modifică valorile variabilelor și parametrilor;
- un apel principal al acestei proceduri;
- arborele de execuție pentru acest apel principal.

Se poate determina calculul procedurii pentru apelul principal dat, în maniera următoare:

(a) Se parcurg toate ramurile arborelui, pornind din rădăcină. Pentru fiecare nod ce corespunde unui apel se înlocuiesc în succesorii săi:

- parametrii variabilă prin parametri actuali corespunzători;
- parametrii valoare prin variabile neutilizate încă.

Se adaugă inițializările variabilelor asociate parametrilor valoare.

(b) Calculul procedurii se obține executând secvența de instrucțiuni ce corespunde arborelui de execuție astfel transformat, considerate în ordine de la stânga la dreapta.

Arborele apelurilor unei proceduri recursive

Adesca nu ne interesează nodurile unui arbore de execuție care sunt etichetate prin secvențe de instrucțiuni (neconținând apeluri recursive). Se numește *arborele apelurilor* arborele obținut plecând de la arborele de execuție păstrând numai nodurile etichetate prin apeluri ale procedurii.

Adâncimea unui apel recursiv este lungimea ramurii ce leagă rădăcina de nodul ce corespunde acestui apel în arborele apelurilor. Un apel principal este deci întotdeauna de adâncime 0.

Două apeluri sunt imbricate dacă unul este provocat prin execuția celuilalt, sau echivalent, dacă există o ramură ce le leagă în arborele apelurilor.

„Programare dinamică”

Până acum, pentru alegerea unei descompuneri recurente a unei probleme date, n-am ținut seamă decât de dimensiunea subproblemelor de rezolvat pe de o parte și de timpul necesar pentru descompunerea problemei inițiale și de rezolvarea sa pornind de la soluția subproblemelor, pe de altă parte. Aceasta nu este întotdeauna suficient, căci anumite descompuneri pot conduce la algoritmi ineficienți întrucât ei rezolvă aceeași problemă de mai multe ori.

Exemplu: Fie un algoritm recursiv de calcul a numărului de combinări de n obiecte luate câte p , bazat pe descompunerea recurentă:

$$(i) \text{ pentru } 0 < p < n, C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1},$$

$$(ii) \text{ pentru } p = 0 \text{ sau } p = n, C_n^p = 1.$$

Un astfel de algoritm nu va fi desigur optimal din punctul de vedere al execuției. Într-adevăr, arborele apelurilor va fi de forma următoare:

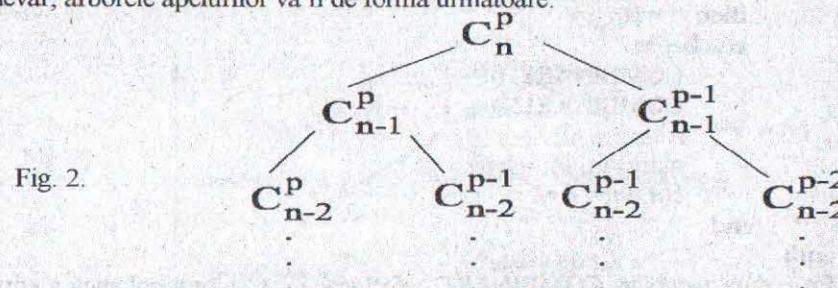


Fig. 2.

Valorile lui C_{n-2}^{p-1} , C_{n-3}^{p-1} , C_{n-3}^{p-2} , ..., sunt deci evaluate de mai multe ori.

Procedura recursivă COMBINARI 1 calculează C_n^p conform cu această descompunere:

procedure COMBINARI1 (**var** r : integer; valoare n, p : integer);

var $r1, r2$: integer;

begin

if ($p = 0$ **or** $p = n$)

then $r := 1$

else begin

COMBINARI1($n - 1, p, r1$);

COMBINARI1($n - 1, p - 1, r2$);

$r := r1 + r2$

end

end;

Procedura COMBINARI1 este ineficientă întrucât efectuează calcule redondante. Pentru ascemenea algoritmi neoptimali se pot construi algoritmi recursivi optimizați

echivalenți. O tehnică frecvent folosită constă în a evalua subprogramele în ordinea crescătoare a ordinii acestora, rezultatele fiecărei subprobleme fiind memorate într-un tablou pentru a nu le mai recalcula. Această tehnică este numită în mod tradițional „programare dinamică” și o vom ilustra pe programul de calcul pentru C_n^p .

Vom asocia fiecărui vârf din arborele apelurilor o marcă, obținând un tablou cu valori booleene care identifică valorile deja calculate. Un vârf etichetat cu C_n^p va fi caracterizat prin perechea (n, p) . Valoarea true pentru marca (n, p) semnifică calculul valorii C_n^p , păstrată în tabloul c pe locul (n, p) . Obținem astfel procedura recursivă următoare:

```
procedure COMBINARI2 (var r: integer; val n, p: integer);
```

```
var r1, r2: integer;
```

```
marca: array[1..n, 1..p] of boolean;
```

```
c: array[1..n, 1..p] of integer;
```

```
begin
```

```
if (p = 0 or p = n)
```

```
then r := 1
```

```
else if marca(n, p)
```

```
then r := c(n, p)
```

```
else begin
```

```
COMBINARI2(n-1, p, r1);
```

```
COMBINARI2(n-1, p-1, r2);
```

```
r := r1 + r2;
```

```
marca(n, p) := true;
```

```
c(n, p) := r
```

```
end
```

```
end;
```

Procedura recursivă COMBINARI2, efectuează o sortare topologică a vârfurilor arborelui apelurilor, calculându-se $C_1^0, C_1^1, C_2^0, C_2^1, C_2^2, \dots$

În cele ce urmează vom elabora variante optimizate ale algoritmului recursiv COMBINARI2. Marcajul servește la identificarea vârfurilor deja întâlnite pentru a evita calculele redondante. Se poate defini o valoare a lui C_n^p fără a efectua calcule redondante și fără a utiliza marcajul. Se înlocuiește al doilea apel recursiv printr-o procedură „bandă” care nu va calcula decât valorile necalculate deja:

```
procedure COMBI1 (var r: integer; val n, p: integer);
```

```
var r1, r2: integer;
```

```
begin
```

```
if (p = 0 or p = n)
```

```
then r := 1
```

```
else begin
```

```
COMBI1(n-1, p, r1);
```

```
COMBI2(n-1, p-1, r2);
```

```
r := r1 + r2;
```

```
c(n, p) := r
```

```
end;
```

```
end;
```

```
procedure COMBI2 (var r: integer; val n, p: integer);
```

```
var r1, r2: integer;
```

```
c: array[1..n, 1..n] of integer;
```

```
begin
```

```
if (p = 0 or p = n)
```

```
then r := 1
```

```
else begin
```

```
if (n-1 = p)
```

```
then r1 := 1
```

```
else r1 := c(n-1, p)
```

```
COMBI2(n-1, p-1, r2);
```

```
r := r1 + r2;
```

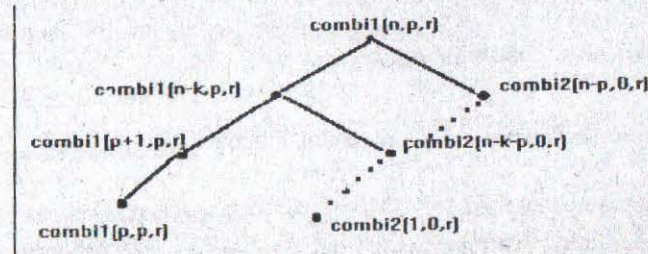
```
c(n, p) := r
```

```
end
```

```
end;
```

Arborele apelurilor asociat apelului principal COMBI1 (n, p, r) are forma următoare:

Fig. 3.



Se observă că:

- în cazul unui apel al procedurii COMBI2, condiția $p = n$ are întodeauna valoarea false.

- în cazul unui apel recursiv al procedurii COMBI1, condiția $p = 0$ are întotdeauna valoarea false: se păstrează totuși testul corespunzător cazului unui apel principal de forma COMBI1 $(n, 0, r)$.

- valorile lui C_n^p calculate printr-un apel al lui COMBI1 nu sunt reutilizate într-un calcul ulterior și este deci inutil să fie memorate.

- nu este necesar să se utilizeze un tablou cu două dimensiuni pentru a păstra valorile lui C_n^p calculate printr-un apel al lui COMBI2, căci numai ultimele p valori calculate sunt necesare și nici o valoare nu este reutilizată mai mult decât o dată.

Bazat pe observațiile precedente se deduc procedurile COMBIM1, COMBIM2, versiuni optimizate ale procedurilor COMBI1 și COMBI2:

```
procedure COMBIM1 (var r: integer; val n, p: integer);
```



```

var r1, r2: integer;
begin
  if (p = 0 or p = n)
  then r := 1
  else begin
    COMBIM1 (n - 1, p, r1);
    COMBIM2 (n - 1, p - 1, r2);
    r := r1 + r2;
  end
end;

procedure COMBIM2 (var r: integer; val n, p: integer);
begin
  if (p = 0)
  then r := 1
  else begin
    if (n - 1 = p)
    then r1 := 1
    else r1 := c(p);
    COMBIM2 (n - 1, p - 1, r2);
    r := r1 + r2;
    c(p) := r;
  end
end;

```

Exerciţiu: Se defineşte şirul numerelor Fibonacci prin:

$$\begin{cases} f_0 = f_1 = 1 \\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \text{ pentru } n \geq 2 \end{cases}$$

Descrieţi un algoritm de calcul al lui f_n bazat pe această definiţie recursivă. Descrieţi un algoritm optimizat de calcul al lui f_n astfel că fiecare f_i , pentru $i \leq n$, nu este evaluat decât o singură dată. Evaluaţi cei doi algoritmi şi comparaţi-i.

2.4 Eliminarea recursivităţii

Algoritmii recursivi constituie o extensie a algoritmilor iterativi întrucât acceptă în plus apeluri de proceduri şi / sau funcţii recursive. Pentru orice algoritm recursiv poate fi construit un algoritm nerecursiv echivalent folosind anumite reguli de transformare. Acest proces se numeşte eliminarea recursiei sau derecursivare.

Derecursivarea unui algoritm recursiv ce calculează valori pentru termenii unui şir recurent corespunde determinării acelui şir recurent.

Eliminarea recursiei se impune când dorim să folosim un limbaj de programare care nu admite recursia (FORTRAN, COBOL, limbaje maşină, BASIC) sau când spaţiul de memorie este limitat.

Întrucât orice algoritm recursiv se poate transforma într-unul iterativ, oricare ar fi problema de rezolvat, va trebui să se aleagă între versiunea recursivă şi cea iterativă a

sa. Dacă problema admite o descompunere recurentă naturală, descrierea recursivă a algoritmului este atunci o descriere simplă a descompunerii alese, mai clar şi mai uşor de analizat privind corectitudinea şi complexitatea sa decât algoritmul iterativ echivalent şi o practică bună de proiectare constă în descrierea recursivă a unui algoritm şi apoi transformarea acestuia în algoritm iterativ pentru a înlătura inconvenientele semnalate pentru recursie.

Există diferite tipuri de transformări ale programelor recursive în programe iterative.

Transformările pot de asemenea să optimizeze calculele efectuate prin algoritmul recursiv suprimând pe cele care corespund la apeluri recursive inutile.

Ne referim numai la cazul recursivităţii simple.

Derecursivarea poate începe cu *eliminarea recursiei la dreapta*. Dacă în corpul unei proceduri, un apel recursiv este plasat astfel că execuţia sa nu este niciodată urmată de execuţia unei alte instrucţiuni a procedurii, acest apel se numeşte recursiv la dreapta.

Eliminarea recursivităţii la dreapta este simplă şi permite o diminuare apreciabilă a timpului de execuţie. Această eliminare prezintă deci în sine un anumit interes. Totuşi ea nu este o etapă necesară pentru a elimina toate apelurile recursive. În particular compilatoarele uzuale nu tratează separat apelurile recursive la dreapta.

Eliminarea completă a recursivităţii se face în două etape:

(a) eliminarea parametrilor şi a variabilelor locale;

(b) transformarea unei proceduri recursive, fără parametri şi fără variabile locale într-o procedură iterativă echivalentă.

§ 3. Algoritmi de aproximare succesivă

O clasă importantă de metode pentru rezolvarea unei probleme numerice P este cea a metodelor iterative sau de aproximare succesivă. Într-o metodă iterativă se porneşte cu o aproximare iniţială şi apoi printr-un calcul numit *iteraţie* se determină o secvenţă de valori folosind o *funcţie de iterare* cunoscută. Elementele şirului numeric astfel obţinut se numesc *aproximante succesive*.

Forma generală a funcţiei de iterare este:

$$x_{n+1} = \Phi(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-m+1}), \quad (1)$$

$$x_0 = x_0, x_1 = x_1, \dots, x_m = x_m \text{ cunoscute.} \quad (2)$$

Un algoritm pentru o metodă iterativă va fi referit ca un algoritm iterativ sau algoritm de aproximare succesivă.

Întrucât (1) şi (2) definesc un şir recurent de ordinul m , algoritmii de aproximare succesivă constituie o alternativă importantă de utilizare a şirurilor recurente în informatică.

Problema fundamentală pentru o metodă iterativă este convergenţa sa, în sensul de convergenţa şirului aproximantelor succesive. Un astfel de algoritm se consideră a fi completat, adică se termină, când este atinsă o anumită precizie a rezultatului prin limitarea numărului de iteraţii sau prin limitarea abaterii între două aproximante succesive.

Fie n un număr natural, $n > 2$ şi a un număr real pozitiv. Un algoritm iterativ

pentru calculul rădăcinii de ordinul n din a , cu o precizie dată se bazează pe utilizarea șirului recurent $(x_n)_{n \geq 0}$ definit prin:

$$x_1 = a, x_{k+1} = \left((n-1) \cdot x_k + \frac{a}{x_k^{n-1}} \right) / n, k \geq 1.$$

Acest șir este convergent și a fost studiat în capitolul I.

Algoritmul calculează pe baza relației de recurență, termenii $x_1, x_2, x_3, \dots$, procesul de calcul fiind oprit când valoarea absolută a diferenței a doi termeni consecutivi devine mai mică decât un număr real, pozitiv, suficient de mic, dat, e . Ultimul termen calculat reprezintă o aproximantă cu precizia e a rădăcinii cerute. Se vor folosi variabilele t și tn pentru doi termeni succesivi ai șirului recurent prin relația de calcul:

$$tn = ((n-1) \cdot t + a / t^{n-1}) / n.$$

Dacă $|tn - t| \geq e$ atunci se transferă valoarea lui tn în t și se va relua procesul de calcul pentru tn determinând termenul următor al șirului.

Descrierea algoritmului în pseudocod:

```
program RAD_ORD_N;
begin
  {Acceptă datele inițiale: a, n, e}
  tn := a; n1 := n - 1; i := 1;
  repeat
    t := tn;
    tn := (n1 * t + a / t^n1) / n;
    i := i + 1;
  until |t - tn| < e;
  {Afișează (tipărește) datele finale: tn, i};
end.
```

Pentru o problemă dată P , diferite forme ale funcției de iterare determină metode iterative diferite, deci algoritmi de aproximare succesivă diferiți.

Considerăm problema de rezolvare aproximativă a unei ecuații neliniare de forma: $f(x) = 0$; (3), unde $f(x)$ este o funcție de variabilă reală continuă având primele două derivate continue pe un interval ce conține o rădăcină reală α a ecuației.

Există mai multe metode iterative pentru determinarea unei valori aproximative a rădăcinii α care folosesc cazuri particulare ale funcției de iterare generală definită prin (1) și (2):

1. Metoda lui Newton-Raphson (metoda tangentei):

$$x_{n+1} = \Phi(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, x_0 \text{ fixat. (4)}$$

2. Metoda coardei sau secantei:

$$x_{n+1} = \Phi(x_n, x_{n-1}) = x_n - f(x_n) \cdot \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}, (5)$$

x_0 și x_1 cunoscuți, $f(x_n) \neq f(x_{n-1})$, $n > 0$.

3. Metoda falsei poziții:

$$x_{n+1} = \Phi(x_n, x_{n-1}) = x_n - f(x_n) \cdot \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \quad (6)$$

x_0 și x_1 fixați, $f(x_n) \cdot f(x_{n-1}) < 0$, $n > 0$, $f(x_n) \neq f(x_{n-1})$.

Teoria șirurilor recurente furnizează suportul teoretic pentru studiul convergenței acestor metode.

Metoda înjumătățirii intervalului este cea mai primitivă procedură pentru aproximarea unei rădăcini reale a unei ecuații neliniare $f(x) = 0$.

Ea poate fi descrisă prin următorul program pseudocod:

program METODA_INJUMATA_TIRII;

{Se aproximează rădăcina ecuației $f(x) = 0$ din intervalul $[a, b]$ }

function $f(x)$: real;

begin

f : = expresia în x a funcției;

end;

begin

read ($f(x)$); read (a, b, e);

if $a > b$ then begin {se schimbă a cu b }

u : = a ; a : = b ; b : = u ;

end;

if $f(a) \cdot f(b) \geq 0$

then write („date necorespunzătoare“)

else

while $b - a > e$ do

begin

c : = $(a + b) / 2$;

if $f(a) \cdot f(c) < 0$

then b : = c

else a : = c ;

end;

write (c);

end.

Metoda înjumătățirii intervalului converge întotdeauna.

Metoda lui Newton-Raphson

Fie α o rădăcină simplă a ecuației. Ea corespunde punctului de intersecție a curbei $y = f(x)$ cu axa ox . Înlocuind curba cu o dreaptă, intersecția acestuia cu ox poate fi mai ușor calculată. Abscisa acestui punct poate fi considerată ca o aproximantă a rădăcinii căutate.

Privită din punct de vedere geometric, metoda lui Newton pornește cu o aproximantă inițială x_0 a lui α , folosește tangenta la curbă în punctul $(x_0, f(x_0))$ și calculează o nouă aproximantă x_1 a rădăcinii ca intersecție a acestei tangente cu

axa ox . Repetând procedeul se calculează o secvență iterativă de valori aproximative $x_0, x_1, \dots$ definită prin relația (4).

Programul pseudocod Newton folosește variabilele t și tn pentru păstrarea a două aproximări succesive rezultate din procesul iterativ și oprește procesul iterativ când diferența dintre două aproximante succesive devine mai mică decât e , fixat.

```

program NEWTON;
function  $f(x)$ : real;
begin
     $f$  := expresie în  $x$  a funcției  $f$ ;
end;
function  $d(x)$ : real;
begin
     $d$  := expresia în  $x$  a derivatei lui  $f$ ;
end;
begin
    read ( $x_0, e$ );
     $tn$  :=  $x_0$ ;
    repeat
         $t$  :=  $tn$ ;  $ft$  :=  $f(t)$ ;  $dt$  :=  $d(t)$ ;
         $tn$  :=  $t - ft / dt$ ;
    until  $|tn - t| < e$ ;
    write ( $tn$ );
end.

```

Dacă x_0 este suficient de aproape de α , atunci metoda lui Newton-Raphson converge.

Dacă valorile tn se îndepărtează prea mult de x_0 , este probabil că această valoare inițială nu a fost bine aleasă. Se poate relua programul cu o altă valoare inițială. Uneori poate fi necesară afișarea valorilor tn intermediare, adică aproximantele succesive, pentru a putea urmări convergența (sau divergența) procesului iterativ.

Metoda coardei. Fie α o rădăcină simplă a ecuației $f(x) = 0$. Ea este reprezentată prin punctul de intersecție al curbei $y = f(x)$ cu axa ox . Metoda coardei pornește cu două valori x_0 și x_1 (de obicei acestea sunt capetele intervalului menționat în enunț) suficient de apropiate de α astfel încât $\alpha \in (x_0, x_1)$ și determină o primă aproximantă x_2 a rădăcinii α ca abscisă a punctului de intersecție dintre axa ox și coarda determinată de punctele $(x_0, f(x_0))$ și $(x_1, f(x_1))$. Aici intervine o mică problemă. Este evident că, pentru o funcție care, în intervalul de plecare, are concavitatea îndreptată în sus avem $\alpha \in (x_2, x_1)$, în cazul contrar, soluția căutată aflându-se în intervalul (x_0, x_2) . Maniera în care se rețin succesiv intervale din ce în ce mai mici se stabilește de la început ținând seama de semnul derivatei de ordinul 2 în intervalul inițial.

Procesul de calcul poate fi oprit la atingerea unui număr maxim de iterații sau în momentul când valoarea diferenței dintre două aproximante succesive satisface condiția: $|x_{n+1} - x_n| < e$, unde e , dat la începutul programului, are o valoare

pozitivă, suficient de mică pentru a considera că următoarele aproximante diferă nesemnificativ și deci nu se mai justifică determinarea lor.

```

program COARDA1;
function  $f(x)$ : real;
begin
     $f$  := expresie în  $x$  a funcției;
end;
begin
    read ( $x_0, x_1, e$ );
     $t1$  :=  $x_0$ ;
     $t2$  :=  $x_1$ ;
    while ( $|t2 - t1| \geq e$ ) do
        begin
             $f1$  :=  $f(t1)$ ;  $f2$  :=  $f(t2)$ ;
             $T$  :=  $t2 - f2 \cdot (t2 - t1) / (f2 - f1)$ ;
             $t1$  :=  $t2$ ;  $t2$  :=  $T$ ;
        end;
    write ( $T$ );
end.

```

În cazul în care se dorește oprirea procesului iterativ nu prin controlul distanței dintre două aproximante succesive ci prin blocarea iterării după un număr de pași precizat la început, atunci printre datele inițiale nu vom preciza maximul distanței, acel e , ci o valoare n , reprezentând numărul maxim de iterații, după cum se poate observa în varianta următoare:

```

program COARDA2;
function  $f(x)$ : real;
begin
     $f$  := expresia în  $x$  a funcției;
end;
begin
    read ( $x_0, x_1, n$ );
     $t1$  :=  $x_0$ ;  $t2$  :=  $x_1$ ;
    for  $i$  := 1 to  $n$  do
        begin
             $t2$  :=  $f(t2)$ ;  $t1$  :=  $f(t1)$ ;
             $T$  :=  $t2 - f2 \cdot (t2 - t1) / (f2 - f1)$ ;
             $t1$  :=  $t2$ ;  $t2$  :=  $T$ ;
        end;
    write ( $T$ );
end.

```

Metoda coardei converge pentru valori inițiale x_0 și x_1 suficient de bune, dacă $f'(\alpha) \neq 0$ și $f(x)$ este de două ori derivabilă.

Metoda falsei poziții folosește aceeași funcție de iterare ca metoda coardei și converge întotdeauna dacă x_n și x_{n-1} satisfac condiția

$$f(x_n) \neq f(x_{n-1}), n > 0, f(x_0) \cdot f(x_1) < 0.$$

Eficiența metodelor iterative pentru aproximarea rădăcinilor unei ecuații de forma $f(x) = 0$ poate fi abordată în raport cu proprietatea de convergență deoarece aceasta este de o importanță fundamentală atât în teoria cât și în practica aplicării acestor metode. Dacă o metodă iterativă converge, este important cât de repede converge. Proprietățile de convergență a diferitelor metode iterative descrise pot fi prezentate definind *ordinul de convergență a unei metode iterative*.

Definiția 1: Fie $x_0, x_1, x_2, \dots$ o secvență de valori obținută folosind (1), care converge la α , rădăcină simplă a ecuației (3). Fie e_n eroarea în iterarea lui x_n , adică: $e_n = |x_n - \alpha|$. Dacă există un număr $p \in \mathbb{R}_+$ și o constantă $c, c \neq 0$, astfel încât:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e_{n+1}}{e_n^p} = c \quad (7)$$

atunci p se numește *ordinul de convergență al metodei* și c *constantă de eroare asimptotică*. Funcția de iterare corespunzătoare $\Phi(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-m+1})$ se zice că este de ordinul p . Ordinul p poate fi considerat ca o măsură a îmbunătățirii preciziei aproximării rădăcinii care este câștigată la fiecare iterație. Este limpede că metoda va converge mai repede când p este mare și c este mic.

Ordinul de convergență este $p = 2$ pentru metoda lui Newton, $p = \frac{1}{2} \cdot (1 + \sqrt{5}) \approx 1,618...$ pentru metoda secantei și $p = 1$ pentru metoda falsei poziții.

Constanta de eroare asimptotică este $c = \left| \frac{1}{2} \cdot \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} \right|$ atât pentru metoda lui Newton-Raphson cât și pentru metoda coardei. Deci metoda lui Newton-Raphson este mai rapidă decât metoda coardei în termeni de număr de iterații necesar pentru a atinge o precizie impusă pentru rădăcini simple ale ecuațiilor neliniare.

În legătură cu convergența, metodele iterative prezentate pentru ecuația $f(x) = 0$ se împart în două grupe după importanța informației apriorice relative la localizarea (poziția) rădăcinii căutate.

Dintr-o primă grupă fac parte metoda Newton-Raphson și metoda secantei pentru care o aproximantă inițială bună sau un interval inițial bun pentru rădăcină sunt esențiale pentru convergența metodei.

Din a doua grupă fac parte așa numitele metode robuste care sunt relativ nesensibile la alegerea informațiilor de demarare a procesului iterativ, cum ar fi alegerea intervalului la metoda înjumătățirii intervalului sau primele două aproximante în metoda falsei poziții. Eficiența diferitelor metode din această grupă poate fi discutată în termeni de *număr de convergență garantată* care reprezintă o estimare a numărului de iterații necesare pentru a atinge o precizie prescrisă. Metoda înjumătățirii intervalului garantează o aproximare a rădăcinii α din intervalul (a, b) cu o toleranță de $+e, -e$ unde e este precizia prescrisă,

după $n = \lceil \log((b - a) / e) \rceil$ iterații, valoare care reprezintă numărul de convergență garantată a acestei metode.

Eficiența metodelor iterative de găsim a rădăcinii α a ecuației $f(x) = 0$ poate fi discutată în termeni de:

- numărul de pași de iterare necesari în raport cu precizia numerică atinsă;
- îmbunătățirea preciziei pe pas de iterație în raport cu „costul” iterației (numărul de operații aritmetice).

Analiza complexității algoritmilor de aproximare succesivă se realizează folosind așa numita *complexitate analitică* ce se măsoară prin numărul total de operații aritmetice necesar pentru a atinge un rezultat aproximativ cu un nivel de precizie prescris.

În general măsurile de eficiență a metodelor iterative pentru determinarea unei rădăcini simple a ecuației neliniare $f(x) = 0$ pot fi obținute definind eficiența ca o funcție de:

- numărul de evaluări de funcție și de derivate necesare pe iterație și „costul” acestor evaluări;
- costul formării formulei iterative (cost combinatorial);
- ordinul de convergență p ;
- mărimea constantei de convergență asimptotică.

§ 4. Utilizări ale șirului Fibonacci

4.1 Algoritmul de căutare Fibonacci

1. Formularea problemei de căutare

În prelucrarea informațiilor cu ajutorul calculatorului un loc aparte îl ocupă așa numitul proces de căutare. Prin *căutare* se înțelege operația de localizare a unei date specifice într-o secvență cunoscută de date de același tip. Căutarea presupune două operații distincte: *memorarea datelor* și *regăsirea acestora*.

Memorarea datelor impune alegerea unei structuri de date. Structura de tablou este potrivită pentru memorarea datelor în problema de căutare statică. Presupunem că fiecare dată, element al tabloului, este o colecție de informații, eventual de tipuri diferite, în cadrul căreia există o porțiune, pe care o vom numi *cheie*, prin intermediul căreia se identifică unic întreaga dată. Ca urmare, structura de date utilizată într-o problemă de căutare reală este aceea de *tablou de articole*. Vom nota cu $a[i]$ cheia corespunzătoare articolului $R[i]$ (*cheia* este un câmp al articolului). Memorarea datelor în procesul de căutare poate fi privită ca problema în care se dă un tablou vid și o secvență arbitrară de date și folosind un algoritm de memorare particular se introduc în tablou datele din secvență.

Procesul de regăsire consideră dat tabloul deja completat, parțial sau total; el constă din căutarea în tablou a celui articol a cărui cheie $a[i]$ se potrivește cu o cheie dată x , la care ne vom referi ca la *cheia de căutare*. Algoritmii de căutare, datorită celor două operații pe care le implică, sunt adesea referiți ca *algoritmi*

de memorare şi regăsire. În cele ce urmează ne vom concentra atenţia asupra procesului de regăsire a informaţiei din tabloul dat.

Localizarea unui articol în cadrul tabloului, prin intermediul cheii sale, asigură accesul la informaţia din cadrul articolului (cel mai adesea extragerea informaţiilor din câmpurile sale). Reamintim că tabloul este o structură de date statică; de aceea, operaţii ca adăugarea unor noi informaţii sau ştergerea ocazională de informaţii regăsite vor fi realizate mai bine prin utilizarea unei structuri de date dinamice (listă, stivă).

În prezentarea algoritmilor de căutare nu vom intra în detalii legate de prelucrarea informaţiei la care aceşti algoritmi asigură accesul şi vom presupune că nu se realizează modificări în zona de memorie a tabloului (adică colecţia de date este statică, dată pentru totdeauna).

Considerăm următoarea specificaţie a problemei de căutare:

Sunt date: un tablou A de chei distincte, $a[1], a[2], \dots, a[n]$, care conţine o listă de valori (eventual vidă) şi o cheie x particulară, de acelaşi tip cu cheile din tablou. Se caută indicele valorii x în tablou. Întrucât căutarea poate fi cu sau fără succes după cum cheia x se află sau nu în tabloul dat, sunt posibile două răspunsuri: „da” urmat de poziţia cheii particulare în cadrul tabloului sau „nu” când cheia x nu se află în tablou (valoarea 0 pentru indice).

Deoarece, în ansamblu, procesul de căutare a datelor implică un mare consum de timp este nevoie de algoritmi de căutare eficienţi. Operaţia de bază în algoritmi de căutare este aceea de comparare a cheii de căutare x cu cheile din tablou. Ca urmare, numărul de comparaţii necesare pentru o căutare particulară poate fi folosit ca o măsură a eficienţei (operaţie fundamentală).

Un număr relativ mare de algoritmi de căutare se bazează pe utilizarea tablourilor ordonate liniar. Fie $a[1], a[2], \dots, a[n]$ un tablou de n chei distincte. Un tablou ordonat liniar se obţine prin sortarea tabloului ce corespunde secvenţei iniţiale arbitrare. Căutarea are sens numai dacă cheia de căutare x satisface condiţia $a[1] \leq x \leq a[n]$. Există un grup de metode de căutare în tablouri ordonate liniar, numite metode de căutare binară. Toate se bazează pe un acelaşi principiu: se selectează din tablou o cheie $a[i]$, după o regulă fixată (în cadrul metodei alese) care va fi cea dintâi comparată cu cheia x . Sunt posibile trei situaţii:

1. $x = a[i]$ caz în care căutarea ia sfârşit cu succes;
2. $x < a[i]$ caz în care domeniul căutării se restrânge la elementele $a[1], \dots, a[i-1]$ şi căutarea se reia conform aceluiaşi principiu;
3. $x > a[i]$ caz în care domeniul căutării se restrânge la elementele $a[i+1], \dots, a[n]$ şi căutarea se reia conform aceluiaşi principiu.

Algoritmul se termină când cheia dorită a fost localizată sau când domeniul căutării nu mai poate fi restrâns.

Metodele de căutare din acest grup se diferenţiază după modul de alegere a cheii $a[i]$ pentru prima comparare cu cheia x şi în raport cu cunoaşterea sau necunoaşterea probabilităţilor de acces a cheilor din tablou. Vom presupune în continuare că frecvenţele de acces ale cheilor sunt necunoscute şi vom considera că sunt echiprobabile. Întrucât structura de arbore binar joacă un rol

fundamental în analiza acestui grup de tehnici de căutare, ele mai sunt cunoscute sub numele de metode de căutare pe arbori sau metode de căutare binară. Un algoritm optimal în clasa metodelor de căutare binară este cel cunoscut sub numele de căutare binară standard: prima cheie comparată cu cheia de căutare x este cheia din mijlocul tabloului.

În clasa metodelor de căutare binară există o metodă particulară cunoscută sub numele de căutare Fibonacci întrucât utilizează numerele Fibonacci:

$$F_k = F_{k-1} + F_{k-2}, F_0 = 0, F_1 = 1, k > 1.$$

Căutarea Fibonacci poate fi folosită pe tablouri în care numărul cheilor n este de forma $n = F_k - 1$, cu F_k un număr Fibonacci cu $k > 1$.

Algoritmul pentru căutarea Fibonacci:

$$\{n = F_k - 1; F_k = F_{k-1} + F_{k-2}\}$$

var

cont: boolean; loc: integer;

begin

if $a[1] \leq x \leq a[n]$

then begin

$i := F_{k-1}; p := F_{k-2}; q := F_{k-3};$

{pe tot parcursul algoritmului p şi q sunt numere Fibonacci consecutive}

cont := true;

while cont do

begin

if $x = a[i]$

then begin cont := false; loc := i end

else if $x < a[i]$

then if $q = 0$

then begin cont := false; loc := 0 end

else begin $i := i - q; t := p; p := q; q := q - t$ end

else if $p = 1$

then begin cont := false; loc := 0 end

else begin $i := i + q; p := p - 1; q := q - p$ end

end;

write loc

else write 'căutarea nu are sens'

end;

O structură de date care este potrivită pentru procesele de căutare descrise este arborele de căutare binar. Arborii de căutare binari reprezintă una dintre tehnicile cele mai flexibile şi mai bine înţelese pentru organizarea colecţiilor mari de date.

Pentru un tablou $a[1], \dots, a[n]$ vom construi arborele binar de căutare asociat ca un arbore binar etichetat în care fiecare nod i este etichetat printr-un element $a[i]$ care aparţine lui A , astfel că:

- a) Pentru fiecare nod j în subarboarele stâng a lui i , $a[j] < a[i]$;
- b) Pentru fiecare nod j în subarboarele drept a lui i , $a[j] > a[i]$;
- c) Pentru fiecare cheie x care este în tabloul A , există exact un nod i astfel ca $a[i] = x$.

Rădăcina arborelui este acea cheie a tabloului care este comparată prima cu cheia de căutare x . La un tablou dat putem asocia mai mulți arbori binari, corespunzător la metode particulare de căutare binară (algoritmul rădăcinii).

Figura 4 arată un arbore binar pentru un tablou cu $n = 12$ care constituie reprezentarea arbore a căutării Fibonacci.

Nivelele într-un arbore de căutare binar se numără de la 0 (nivelul rădăcinii), k fiind cel mai mare nivel sau ultimul nivel. În exemplul dat $k = 4$.

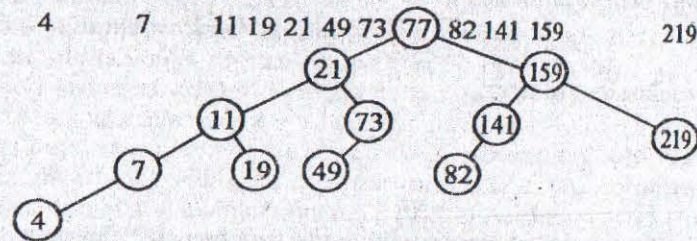


Fig. 4

Complexitatea diferiților algoritmi de căutare poate fi studiată pe arborii binari corespunzători.

Adâncimea unui arbore este nivelul maxim, deci adâncimea maximă a nodurilor sale și reprezintă lungimea celei mai lungi ramuri de la rădăcină la un nod terminal. Un arbore binar se va numi *balansat* dacă adâncimea subarboarelor stâng al fiecărui nod nu diferă niciodată prin mai mult de $+1$ - de adâncimea subarboarelor drept al aceluiași nod. Arborile binar corespunzător metodei binare standard este *balansat*; de asemenea cel pentru căutarea Fibonacci.

Când frecvențele de acces ale cheilor sunt cunoscute este mai avantajos să se folosească *arbori binari nebalansați* cu așa numita *lungime de drum ponderată* care este definită luând în calcul frecvențele cheilor (frecvențele cheilor sunt referite ca ponderi ale nodurilor).

Distingem între arbori *balansați pentru chei distribuite uniform* (algoritmul de căutare binară și folosirea arborilor Fibonacci) și arbori *nebalansați* pentru diferite distribuții neuniforme ale cheilor. Au fost proiectați algoritmi pentru construirea de arbori binari optimali sub presupuneri de diferite distribuții ale cheilor. Acești algoritmi prezintă un interes mai mult teoretic.

Metoda de căutare pe arbore binar are următoarea structură de bază:

Pentru a găsi dacă o cheie de căutare este în arbore o comparăm cu cheia din rădăcină și apar cazurile:

- (i) nu există rădăcină (arborele binar este vid); cheia de căutare nu este în arbore și căutarea se termină fără succes;
- (ii) cheia de căutare coincide cu cheia din rădăcină; căutarea se termină cu succes;

(iii) cheia de căutare este mai mică decât cea din rădăcină: căutarea continuă cu examinarea subarboarelor stâng al rădăcinii în același mod;

(iv) cheia de căutare este mai mare decât cea din rădăcină: căutarea continuă cu examinarea subarboarelor drept al rădăcinii în același mod.

Vom numi costul unui arbore de căutare binar numărul de comparații cerut de o căutare particulară pe arbore. O definiție echivalentă a costului unui arbore poate fi dată adăugând întâi arborelui $n + 1$ noduri terminale fictive, într-o manieră arătată în figura 5 și apoi definind următoarele:

Dacă o cheie de căutare x este eticheta $a[i]$ a unui nod i , atunci numărul de noduri vizitate când căutăm x este cu unu mai mare decât adâncimea nodului i .

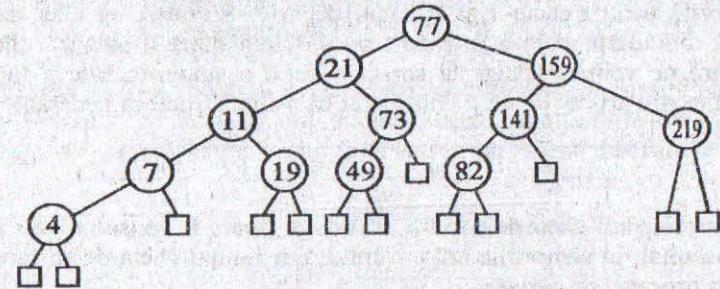


Fig. 5

Dacă x nu este în tabloul A și $a[i] < x < a[i + 1]$ atunci numărul de noduri vizitate pentru a-l căuta pe x este egal cu adâncimea nodului terminal fictiv i .

Din descrierea unui arbore de căutare binar vedem că adâncimea unui astfel de arbore și deci costul său este direct legată de modul în care:

(i) este selectată rădăcina arborelui (sau cheia din tablou pentru prima comparație) și

(ii) este selectată o strategie „divide-et-impera” folosită în construcția arborelui.

Algoritmul de căutare Fibonacci selectează ca rădăcină a arborelui binar de căutare acel element al tabloului al cărui indice este numărul Fibonacci ce precede imediat în șirul Fibonacci numărul F_k ce satisface relația $n = F_k - 1$.

Strategia „divide-et-impera” folosită în construcția arborelui selectează rădăcinile subarboarelor stâng și drept în același fel ca rădăcina arborelui respectându-se condițiile din definiția unui arbore binar de căutare.

Eficiența metodei de căutare Fibonacci a fost studiată de Overhold (1973) care a arătat că nu este optimală în termeni de număr de comparații necesare. În mod specific timpul este cu 4% mai mare decât la căutarea binară standard.

4.2 Distribuția Fibonacci în sortarea externă prin interclasare

Sortarea datelor este unul dintre cele mai comune procese în informatică și constituie o parte esențială a unui număr mare de programe de prelucrare a informațiilor.

Sortarea datelor constă în rearanjarea unei colecţii de informaţii structurată de obicei ca un tablou de articole astfel încât să fie într-o anumită ordine, crescătoare sau descrescătoare, în raport cu valorile unuia sau mai multora dintre câmpurile fiecărui element al colecţiei.

Considerăm dat un tablou de articole ce urmează a fi sortat.

Prin cheie sau cheie de sortare referim o parte componentă a articolului, în raport cu care se face sortarea. În principiu cheia de sortare constituie un identificator al articolului, adică pentru articole diferite valorile cheilor corespunzătoare sunt distincte. Pot exista mai multe chei de sortare: cheie-1, cheie-2, ..., cheie- n ; ele sunt considerate ierarhic în procesul de sortare în sensul că pentru articole cu aceeaşi valoare pentru cheie-1 se face aranjarea potrivit ordinii dorite pentru cheie-2 şi aşa mai departe. Sortarea cu chei multiple nu comportă dificultăţi majore în raport cu sortarea după o singură cheie, motiv pentru care ne vom restrânge la sortarea după o singură cheie a tabloului de articole. Fiecare articol poate fi considerat ca având structura generală

inf-1	cheie	inf-2
-------	-------	-------

Prin intermediul cheii de sortare un articol poate fi consultat sau actualizat, parţial sau total, în câmpurile inf-1 şi inf-2, dar numai cheia de sortare intervine esenţial în procesul de sortare.

Sunt cunoscuţi numeroşi algoritmi de sortare a unei colecţii de articole clasificaţi în *algoritmi de sortare internă* când toate articolele de sortat sunt disponibile în memoria internă a calculatorului pe toată durata execuţiei algoritmului şi *algoritmi de sortare externă* când datorită dimensiunii unui articol şi numărului acestora, articolele sunt memorate pe un suport de memorie externă (bandă magnetică, disket) şi numai un număr restrâns de articole poate fi disponibil în memoria internă la un moment dat.

Întrucât informaţiile inf-1 şi inf-2 ce sunt asociate cheii de sortare nu intervin în procesul de sortare, vom studia procesul de sortare limitându-ne la valorile cheilor $k[1], k[2], \dots, k[n]$.

Lista cheilor $k[1], k[2], \dots, k[n]$ este sortată în ordine crescătoare (nedescrescătoare) dacă $i < j$ implică $k[i] \leq k[j]$ şi este în ordine descrescătoare (necrescătoare) dacă $i < j$ implică $k[i] \geq k[j]$ pentru toate elementele listei.

Cea mai comună abordare pentru sortarea externă este o sortare internă urmată de o interclasare. Metodele de sortare externă cele mai utilizate se bazează pe interclasarea a două fişiere numită şi interclasare pe 2-căi. Deoarece interclasările trebuie făcute în mod repetat, aceşti algoritmi sunt numiţi algoritmi de sortare prin interclasare polifazată.

Definim o *monotonie* ca o secvenţă de chei în ordine nedescrescătoare; o *monotonie* reprezintă un subfişier ordonat.

Schema generală a sortării externe are două etape:

1. Crearea monotoniei şi distribuţia lor;
2. Interclasarea polifazată care interclasează în mod repetat monotonii până când există numai una.

Algoritmul de interclasare a două fişiere reuneşte într-un nou fişier sortat conţinutul a două fişiere sortate în acelaşi fel (crescător sau descrescător).

Fie $f = \langle f_1, f_2, \dots, f_m \rangle$ şi $g = \langle g_1, g_2, \dots, g_n \rangle$ două fişiere sortate crescător, adică:

$$\forall i, j ((1 \leq i < j \leq m) \Rightarrow (f_i < f_j)), \forall i, j ((1 \leq i < j \leq n) \Rightarrow (g_i < g_j)).$$

Algoritmul de interclasare a lor creează un nou fişier sortat h , unde $h = \langle h_1, h_2, \dots, h_{m+n} \rangle$ reunind conţinutul fişierelor f şi g , deci:

$$\forall i, j ((1 \leq i < j \leq (m+n)) \Rightarrow (h_i < h_j)) \text{ şi } (f_1 f_2 \dots f_m g_1 g_2 \dots g_n) \text{ permută } (h_1 h_2 \dots h_{m+n}).$$

Interclasarea pe 2-căi poate fi evident extinsă la interclasarea pe P -căi în care nu două ci P subfişiere ordonate iniţial sunt folosite simultan într-un algoritm de interclasare pentru a produce un fişier final sortat. Ideea este ilustrată în figura 6.

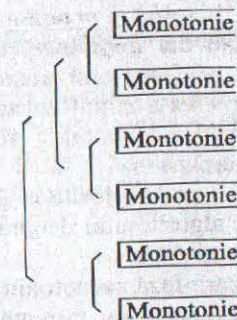


Fig. 6. O interclasare pe 6-căi.

În această formă mai generală este folosită interclasarea, în mod extensiv, în diferitele metode de sortare externă.

Presupunem că numărul cheilor în lista supusă sortării este atât de mare încât ele nu pot încăpea toate în memoria internă la un moment dat astfel că unele trebuie memorate pe un dispozitiv de memorie externă. Vom presupune că benzile magnetice sunt folosite în acest scop. (Metodele prezentate pot fi folosite cu modificări minore când se foloseşte un alt suport extern).

Există câteva trăsături specifice sortării externe care foloseşte benzi. Spre exemplu, cheile sunt memorate pe bandă secvenţial şi astfel, pentru a le accesa în aceeaşi ordine în care ele au fost introduse, banda trebuie întâi să fie rebobinată, operaţie care consumă timp şi un algoritm eficient va cere un timp mai scurt pentru rebobinare sau o va elimina.

La începutul procesului de sortare externă avem la dispoziţie un număr specificat de benzi magnetice pe care-l notăm cu T . Orice metodă de sortare cu T benzi partitionează benzile în două grupuri. Primul grup este folosit pentru distribuţia monotoniei iniţiale (în ordine alternativă) şi al doilea grup este întâi

folosit în prima fază de interclasare; rolurile grupurilor sunt apoi inversate în următoarele faze de interclasare.

Citirea cheilor este una din operațiile esențiale în sortarea externă. O problemă importantă relativ la eficiența unui algoritm de sortare externă este distribuția monotonilor inițiale pe benzi într-un mod care să minimizeze numărul de parcurgeri complete a cheilor.

O altă problemă importantă este crearea monotonilor într-un mod care să minimizeze numărul de parcurgeri complete a cheilor necesar pentru a face sortarea.

Întrucât scopul final al sortării externe este de a produce un singur fișier sortat este preferabil să creăm monotonii inițiale care sunt cât mai lungi, ceea ce micșorează numărul fazelor de interclasare. Pe de altă parte, creșterea lungimii unei monotonii inițiale face necesare operații suplimentare în timpul fazei de sortare internă și întrucât pentru toți algoritmi de sortare internă cunoscuți, acest cost crește mai rapid decât liniar cu lungimea medie a monotoniei, există o limită pentru lungimea monotoniei până la care putem merge.

Fie n numărul total de chei de sortat și m numărul de chei care se pot păstra în memoria internă la un moment dat împreună cu programele necesare pentru efectuarea sortării. Lungimea unei monotonii create inițial poate fi cel mult m .

Presupunem că monotonii create inițial au aceeași lungime (de fapt ultima poate fi mai mică). Fie S numărul monotonilor create inițial și P numărul de căi folosite, numit și ordinul de interclasare.

Distribuția monotonilor pe benzile folosite în faza curentă într-o interclasare cu P -căi influențează eficiența algoritmului deoarece fazele de copiere sunt faze pasive și un algoritm eficient le va evita.

Varianta pentru care în fiecare fază monotonii sunt distribuite cât mai egal posibil pe benzile folosite în sortarea curentă constituie un exemplu de interclasare balansată cu P -căi.

O variantă eficientă corespunde unei distribuții foarte particulare a monotonilor care folosește numerele Fibonacci și proprietățile lor. Această variantă este așa-numita sortare polifazăată bazată pe distribuții Fibonacci perfecte.

Se pare că Knuth (1973) a îmbunătățit primul teoria metodei de interclasare polifazăată observând relația sa cu așa-numitele distribuții Fibonacci.

Distribuțiile Fibonacci sunt bazate pe numerele Fibonacci definite prin relația de recurență:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 2, F_0 = 0, F_1 = 1. (1)$$

Primele 10 numere Fibonacci sunt:

$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5, (2)$$

$$F_6 = 8, F_7 = 13, F_8 = 21, F_9 = 34, F_{10} = 55.$$

Fie $T = 3, P = 2$ și $S = 13$. Pentru acești parametri, trei variante de interclasare a monotonilor inițiale sunt date în tabelul 1. În acest tabel, '1, 1, 1, 1, 1, 1, 1' desemnează șapte monotonii inițiale; '2, 2, 2' desemnează trei monotonii de lungime relativă 2; etc.

Varianta 1 este un exemplu de interclasare balansată cu P -căi ($P = 2$).

Varianta 2 este o modificare a interclasării balansate cu 2-căi folosind 3 benzi.

Varianta 3 este un exemplu de sortare polifazăată bazată pe distribuții Fibonacci perfecte, întrucât, avem:

$$S = F_n = F_{n-1} + F_{n-2} = F_7 = F_6 + F_5 = 13 = 8 + 5. (3)$$

Distribuția inițială a monotonilor pe T_1 și T_2 , în modul definit prin (3), elimină complet faza de copiere și metoda cere exact $(n - 1)$ faze pentru a termina sortarea.

Distribuția monotonilor inițiale definită prin (3) și (1) este numită distribuția Fibonacci perfectă.

Dacă numărul monotonilor inițiale nu se potrivește cu distribuția Fibonacci perfectă, se pot adăuga monotonii fictive pentru a putea aplica distribuția Fibonacci. Numerele Fibonacci date prin (1) pot fi legate în mod explicit de cantitatea $P = 2$, folosind notația următoare:

$$F_n^{(2)} = F_{n-1}^{(2)} + F_{n-2}^{(2)}, n \geq 2, F_0^{(2)} = 0, F_1^{(2)} = 1 (4)$$

Tabelul 1

		Conținutul pentru			Observații
		T_1	T_2	T_3	
	Faza 1	1,1,1,1,1,1,1	1,1,1,1,1,1	...	Distribuție inițială
	Faza 2	...	...	2,2,2,2,2,1	Interclasează 7 monotonii în T_3
V	Faza 3	2,2,2,1	2,2,2	...	Copie monotoniiile alternativ în T_3 și T_2
a	Faza 4	...	...	4,4,4,1	Interclasează 4 monotonii în T_3
r	Faza 5	4,4	4,1	...	Copie monotoniiile alternativ în T_1 și T_2
i	Faza 6	...	...	8,5	Interclasează 2 monotonii în T_3
a	Faza 7	8	5	...	Copie monotoniiile alternativ în T_1 și T_2
n	Faza 8	...	...	13	Interclasează o monotonie în T_3

V a r i a n t a 2	Faza 1	1,1,1,1,1,1	1,1,1,1,1,1	...	Distribuție inițială
	Faza 2	...	...	2,2,2,2,2,1	Interclasează 7 monotonii în T_3
	Faza 3	2,2,2,1	...	2,2,2	Copie jumătate din monotonii pe T_1 (ia fiecare a doua monotonie și o copiază)
	Faza 4	...	4,4,4,1	...	Interclasează 4 monotonii în T_2
	Faza 5	4,4	4,1	...	Copie jumătate din monotonii pe T_1
	Faza 6	...	...	8,5	Interclasează 2 monotonii pe T_2
	Faza 7	...	8	5	Copie jumătate din monotonii pe T_2
	Faza 8	13	...	...	Interclasează o monotonie pe T_1
V a r i a n t a 3	Faza 1	1,1,1,1,1,1,1,1	1,1,1,1,1,1	...	Distribuție inițială
	Faza 2	1,1,1	...	2,2,2,2,2	Interclasează 5 monotonii pe T_3
	Faza 3	...	3,3,3	2,2	Interclasează 3 monotonii pe T_2
	Faza 4	5,5	3	...	Interclasează 2 monotonii pe T_1
	Faza 5	5	...	8	Interclasează o monotonie pe T_3
	Faza 6	...	13	...	Interclasează o monotonie pe T_2

Această notație poate părea artificială dar este convenabilă pentru analiza sortării polifazate generale cu T -benzi întrucât forma (4) poate fi generalizată într-un mod direct pentru a defini numerele Fibonacci pentru orice p , adică

$$F_n^{(p)} = F_{n-1}^{(p)} + F_{n-2}^{(p)} + \dots + F_{n-p}^{(p)}, n \geq p, \\ F_0^{(p)} = 0, F_1^{(p)} = 0, \dots, F_{p-2}^{(p)} = 0, F_{p-1}^{(p)} = 1. \quad (5)$$

Șirul Fibonacci generalizat (5) este referit ca *numere Fibonacci de ordinul p* .

Spre exemplu, primele 11 numere Fibonacci de ordinul 4 (al IV-lea) sunt:

$$F_0^{(4)} = 0, F_1^{(4)} = 0, F_2^{(4)} = 0, F_3^{(4)} = 1, F_4^{(4)} = 1, F_5^{(4)} = 2, \\ F_6^{(4)} = 4, F_7^{(4)} = 8, F_8^{(4)} = 15, F_9^{(4)} = 29, F_{10}^{(4)} = 56, F_{11}^{(4)} = 108. \quad (6)$$

Șirul (5) este folosit pentru a produce distribuții Fibonacci perfecte într-o sortare externă când $P > 2$. Un detaliu important al sortărilor bazate pe distribuții Fibonacci perfecte este presupunerea că $P = T - 1$ pentru orice T dat. Aceasta înseamnă că în aceste sortări numai o bandă este făcută liberă la sfârșitul fiecărei faze.

În general, dacă numărul de monotonii construite în prima fază a sortării externe cu trei benzi T_0, T_1, T_2 este un număr Fibonacci, F_s , pentru un anume s , atunci distribuind monotonii astfel încât F_{s-1} monotonii sunt pe o bandă și F_{s-2}

pe cealaltă, suntem asigurați că vor fi întotdeauna monotonii pe două benzi gata pentru interclasare fără a copia chei, până când cheile sunt sortate. Presupunând că faza de construcție a monotoniiilor a pus F_{s-2} monotonii pe T_1 și F_{s-1} monotonii pe T_2 , etapa a 2-a din schema generală a sortării externe pe trei benzi se realizează prin următorul algoritm, cunoscut sub numele de algoritmul de interclasare cu trei benzi folosind o distribuție Fibonacci:

{Interclasare monotonii}

$i1 := 1; i2 := 2; \{ \text{indicii benzilor de intrare} \}$

$j := 0 \{ \text{indice pentru banda de ieșire} \}$

while există mai mult decât o monotonie **do**

begin

1. Interclasează monotonii din T_{i1} și T_{i2} punând monotoniiile rezultate pe T_j , până când T_{i1} este vid.

2. Rebobinează T_{i1} și T_j .

3. $i1 := i1 + 1; i2 := i2 + 1; j := j + 1$; (toate modulo 3).

end.

Numărul de parcurgeri ale cheilor în sortarea externă cu algoritmul de interclasare cu 3 benzi folosind o distribuție Fibonacci este aproximativ $1,04 \log_3 r$, r fiind numărul de monotonii create în prima fază a sortării externe. Folosirea distribuției Fibonacci este de asemenea foarte folositoare dacă mai multe benzi sunt disponibile; ea poate fi generalizată pentru a proiecta algoritmi foarte rapizi.

§ 5. Instruire asistată de calculator.

5.1. Programe BASIC pentru algoritmi de aproximare succesivă.

Descrierile în limbaj pseudocod pentru algoritmi de aproximare succesivă prezentați în paragraful § 3. sunt transformate în programe scrise în limbajul BASIC standard folosit pe microcalculatoare compatibile Spectrum. Versiuni noi de BASIC extins conform standardului ANSI '86 (X3j / 84 - 26) se bucură de o audiență crescândă în mulțimea programatorilor posesori de calculatoare personale. Variantele de programe în dialectele BASIC sau în alte limbaje de programare (PASCAL, FORTRAN, C) pot fi elaborate folosind descrierile în limbaj pseudocod.

Programul 1. Aproximarea rădăcinii de ordin n dintr-un număr dat a cu precizie ϵ , reprezentând diferența maximă dintre două aproximante succesive.

```
10 REM *****
15 REM Programul 1
20 REM aproximează rădăcina de
25 REM ordin n dintr-un număr dat
30 REM *****
40 REM
45 INPUT "Tastați un număr > 0: "; a
50 INPUT "Dați ordinul rad. : "; n
55 PRINT AT 10, 0; "Indicați valoarea maximă a diferenței dintre două
```



```

aproximante succesive: e"
60 INPUT "Dați precizia e = "; e
70 LET tu = a: LET n1 = n - 1
75 LET i = 1
80 LET t = tu
85 LET tu = (n1 * t + a / t ^ n1) / n
90 LET i = i + 1
95 IF ABS (t - tu) >= e THEN GO TO 80
99 CLS
100 PRINT "Numărul dat: "; a
110 PRINT " "
120 PRINT "Ordinul radicalului: "; n
130 PRINT " "
140 PRINT "Precizia impusă: "; e
150 PRINT " ": PRINT " "
160 PRINT "Aproximanta găsită : "; tu
170 STOP

```

Programul 2. Aproximarea unei rădăcini simple a unei ecuații neliniare $f(x) = 0$ prin metoda lui Newton-Raphson.

```

10 REM *****
15 REM Programul 2
18 REM Newton-Raphson
20 REM *****
30 REM
40 DEF FN f(x) = LN (2 * x + 5)
50 DEF FN d(x) = 2 / (2 * x + 5)
60 PRINT AT 8, 0; "Pentru funcția din linia 40 având derivata în linia 50
calculăm o aproximare a unei rădăcini reale pornind
cu valoarea inițială x0 și o eroare < eps!"
70 INPUT "Dați valoarea inițială :"; x0
80 INPUT "Dați precizia eps a aproximării :"; eps
90 LET tn = x0
100 LET t = tn
110 LET ft = FN f(t)
120 LET dt = FN d(t)
130 LET tn = -ft / dt
140 IF ABS (tn - t) <= eps THEN GO TO 100
150 PRINT AT 14, 0; "Aproximarea găsită :"; tn
155 BEEP .5, 10: BEEP .25, 14: BEEP .25, 14: BEEP .5, 10
160 PRINT AT 21, 0; "Reluați? (d/n)? : "
170 IF INKEYS = " " THEN GO TO 170
180 IF INKEYS = "d" OR INKEYS = "D" THEN GO TO 70
185 BEEP .1, 40: BEEP .1, 45: BEEP .1, 30: BEEP .1, 25:

```

```

BEEP .1, 23: BEEP .1, 20: BEEP .1, 18: BEEP .1, 15
190 STOP

```

Programul 3. Aproximarea unei rădăcini simple a unei ecuații neliniare $f(x) = 0$ prin metoda coardei. Sunt folosite două versiuni ce corespund celor două tipuri de condiții de oprire: diferența maximă dintre două aproximante succesive și respectiv numărul maxim de iterații.

```

10 REM *****
15 REM Programul 3.v.1.
18 REM Metoda coardei
19 REM | x(n) - x(n-1) < eps |
20 REM *****
30 REM
40 DEF FN f(x) = 2 * x ^ 3 - 3 * x ^ 2 + x - 6
50 PRINT AT 8, 0; "Pentru altă funcție schimbați linia 40 din program!"
70 PRINT AT 21, 0; "Dați intervalul : "
80 INPUT "x0 = "; x0; "x1 = "; x1
90 PRINT AT 21, 0; "Dați maximul diferenței dintre două aproximante
succesive: "
100 INPUT "eps = "; eps
110 LET t1 = x0: LET t2 = x1
120 IF ABS (t2 - t1) < eps THEN GO TO 170
130 LET f1 = FN f(t1)
140 LET f2 = FN f(t2)
150 LET T = t2 - f2 * (t2 - t1) / (f2 - f1)
155 LET t1 = t2: LET t2 = T
160 GO TO 120
170 PRINT " "
180 PRINT "Aproximanta găsită :"; T
190 PRINT "Reveniți? (d/n)"
193 IF INKEYS = " " THEN GO TO 193
195 LET r$ = INKEYS
200 IF r$ = "d" OR r$ = "D" THEN GO TO 70
210 STOP

```

```

10 REM *****
15 REM Programul 3.v.2.
20 REM Metoda coardei cu n iterații
30 REM *****
40 DEF FN f(x) = 2 * x ^ 3 - 3 * x ^ 2 + x - 1
50 PRINT AT 8, 0; "Vom aproxima o rădăcină reală dintr-un interval dat
(x0, x1)": PRINT "Pentru o altă
funcție modificați linia 40 din program"
60 INPUT "x0 = "; x0; "x1 = "; x1

```



```

65 INPUT      "Nr. maxim de iterații: "; n
70 LET t1 = x0: LET t2 = x1
80 FOR i = 1 TO n
90 LET g = FN f(t2)
100 LET h = FN f(t1)
110 LET T = t2 - g * (t2 - t1) / (g - h)
120 LET t1 = t2: LET t2 = T
130 NEXT i
135 PRINT AT 15, 0; " ";: FOR i = 1 TO 31: PRINT " ";:
    PAUSE 4: NEXT i
140 PRINT AT 15, 0; "Aproximarea rădăcinii: "; T
150 PRINT AT 21, 0; "Doriți să reluați ? (d/n) : "
160 IF INKEYS = "" THEN GO TO 160
170 LET r$ = INKEYS
180 IF r$ = "d" OR r$ = "D" THEN GO TO 60
190 STOP

```

O subclasă importantă a mulțimii ecuațiilor neliniare este cea a ecuațiilor polinomiale. Pentru evaluarea funcției și a primei sale derivate într-un punct dat în algoritmul de aproximare succesivă se poate folosi în acest caz algoritmul lui Horner.

El necesită pentru un polinom de gradul n cel mai mic număr de adunări și de înmulțiri (n adunări și n înmulțiri).

Programul 4 aproximează o rădăcină reală simplă a unei ecuații de forma $P(x) = 0$, unde $P(x) = a_1x^n + a_2x^{n-1} + \dots + a_{n+1}$, prin metoda înjumătățirii intervalului cu precizia aproximării e reprezentând lungimea maximă a intervalului ce conține rădăcina.

```

10 REM *****
15 REM                                     Programul 4
16 REM                                     Metoda înjumătățirii intervalului
17 REM                                     pentru rădăcina ecuației  $P(x) = 0$ 
20 REM *****
30 REM
40 PRINT AT 8, 0; "Vom aproxima o rădăcină a unei ecuații polinomiale date
    prin grad și coeficienți presupusă într-un interval dat!"
45 PRINT AT 13, 0; "Ecuația are forma : "
46 PRINT "a(1) * X ^ n + ... + a(n + 1) = 0"
50 INPUT "Dați gradul ecuației: "; n
60 PRINT AT 21, 0; "Dați coeficienții ecuației : "
70 DIM a(n + 1)
80 FOR i = 1 TO n + 1
90 INPUT ("a("; i; ") = "); a(i)
100 NEXT i
110 PRINT AT 21, 0; "Dați intervalul (c, d) : "
120 INPUT "c = "; c; d = "; d
130 PRINT AT 21, 0; "Dați precizia aproximării : "
140 INPUT "e = "; e

```

```

150 IF c < d THEN GO TO 170
160 LET u = c: LET c = d: LET d = u
170 LET x = c: GO SUB 300
180 LET v1 = v
190 LET x = d: GO SUB 300
195 LET v2 = v
200 IF v1 * v2 >= 0 THEN GO TO 290
210 IF d - c <= e THEN GO TO 280
220 LET b = (c + d) / 2
230 LET x = b: GO SUB 300
235 IF ABS(v) < e THEN GO TO 280
240 IF v1 * v < 0 THEN GO TO 260
250 LET c = b: LET v1 = v: GO TO 210
260 LET d = b: LET v2 = v: GO TO 210
280 PRINT AT 21, 0; " ";:
283 FOR i = 1 TO 29: PRINT " ";: PAUSE 5: NEXT i
285 PRINT AT 21, 0; "Aproximarea rădăcinii = "; b
286 STOP
290 PRINT AT 21, 0; "Se pare că intervalul nu este bine ales!"
293 INPUT "Reveniți? d/n : "; r$
295 IF r$ = "d" OR r$ = "D" THEN GO TO 110
297 STOP
300 REM rutina HORNER pentru calculul valorii polinomului
310 LET v = a(1): LET m = n + 1
320 LET i = 2
330 LET v = x * v + a(i)
340 LET i = i + 1
350 IF i <= m THEN GO TO 330
360 RETURN

```

Programul 5 este versiunea programului 2 în cazul unei ecuații polinomiale. El folosește o rutină pentru calculul polinomului și a primei sale derivate într-un punct dat ce corespunde algoritmului descris în limbaj pseudocod prin procedura POLDER2. Acest algoritm constituie o variantă a algoritmului descris prin procedura POLDER1; el folosește $2n - 1$ adunări și numai $n + 1$ înmulțiri fiind mai bun din punct de vedere computațional decât algoritmul descris prin POLDER1, care necesită $2n - 1$ înmulțiri și tot atâtea adunări.

Fie n un număr natural, $n \geq 2$ și polinomul de grad n

$$P(x) = a(0) * x^n + a(1) * x^{n-1} + \dots + a(n).$$

Se știe că:

$$\begin{aligned}
 P'(x) &= n * a(0) * x^{n-1} + (n-1) * a(1) * x^{n-2} + \dots + a(n-1) = \\
 &= [a(n-1) + x * (a(n-2) + x * (a(n-3) + \dots + x * (a(1) + a(0) * x) \dots))] + \\
 &\quad + x * [a(n-2) + x * (a(n-3) + \dots + x * (a(1) + a(0) * x) \dots)] + \\
 &\quad + x^2 * [a(n-3) + \dots + x * (a(1) + a(0) * x) \dots] + \dots \\
 &\quad \dots + x^{n-2} * [a(1) + a(0) * x] + x^{n-1} * [a(0)]
 \end{aligned}$$

Notând cu $b(i)$ expresiile din parantezele pătrate observăm că toți coeficienții b sunt calculați în timpul evaluării polinomului însuși prin algoritmul HORNER. Deci putem scrie în paralel:

$$P'(x) = b(0) * x^{n-1} + b(1) * x^{n-2} + \dots + b(n-3) * x^2 + b(n-2) * x + b(n-1)$$

și

$$P(x) = \underbrace{(\dots\dots)}_{n-1 \text{ paranteze}} ((a(0) * x + a(1)) * x + a(2)) * x + \dots + a(n-1)) * x + a(n)$$

procedură POLDER1 ($a, n, x0, v, w$);

local b, c, i ;

begin

$b(0) := a(0)$;

for $i := 1$ to n do

$b(i) := x0 * b(i-1) + a(i)$;

$v := b(n)$;

$c(0) := b(0) * x0 + b(1)$;

for $i := 1$ to $n-2$ do

$c(i) := x0 * c(i-1) + b(i+1)$;

$w := c(n-2)$;

end.

sau

procedure POLDER2 ($a, n, x0, v, w$);

local i, m ;

begin

$v := x0 * a(0) + a(1)$;

$w := x0 * a(0) + v$;

$m := n-2$;

for $i := 1$ to m do

begin

$v := x0 * v + a(i+1)$;

$w := x0 * w + v$

end;

$v := x0 * v + a(n)$

end.

10 REM *****

15 REM Programul 5

18 REM Metoda Newton-Rapshon pentru ecuația $P(x) = 0$

20 REM *****

30 REM *****

40 PRINT AT 8, 0; "Vom calcula o valoare aproximativă a unei rădăcini a unui polinom, cu metoda tangentei, pornind de la un punct inițial $x0$!"

50 PRINT AT 12, 0; "Forma polinomului este :

$a(0) * x^n + \dots + a(n)$ "

60 INPUT "Dați gradul polinomului :"; n

70 DIM $a(n+1)$: LET $p = n+1$

80 FOR $i = 1$ TO p

90 INPUT "a("; $(i-1)$; ") = "; $a(i)$

100 NEXT i

110 INPUT "Dați $x0$:"; $x0$

120 INPUT "Dați maximul erorii: "; e

130 BEEP .25, 0: BEEP .25, 0: BEEP .25, 4: BEEP .25, 4: BEEP .5, 7:
BEEP .25, 9: BEEP .25, 7: BEEP .5, 5: BEEP .5, 4

140 LET $tn = x0$

144 LET $t = tn$

147 GO SUB 300

150 LET $tn = t - v / w$

160 IF ABS($tn - t$) >= e THEN GO TO 144

170 PRINT " "

180 PRINT "Aproximarea rădăcinii: "; tn

190 REM

200 STOP

300 LET $v = a(1) * t + a(2)$

310 IF $n > 1$ THEN GO TO 350

340 LET $w = a(1)$: GO TO 420

350 LET $w = a(1) * t + v$

360 LET $m = n - 1$

370 FOR $i = 2$ TO m

380 LET $v = t * v + a(i+1)$

390 LET $w = t * w + v$

400 NEXT i

405 IF $n < 2$ THEN GO TO 420

410 LET $v = t * v + a(n+1)$

420 RETURN

5.2 Proceduri PASCAL pentru algoritmi recursivi

a) Algoritmul de sortare prin segmentare (QUICKSORT)

Considerăm cazul sortării în ordine crescătoare pentru n chei memorate într-un tablou A :

$A[1], A[2], \dots, A[N]$.

Una dintre metodele cele mai rapide și mai des folosite pentru sortarea tablourilor mari este sortarea prin segmentare. Ea a fost inventată de C.A.R. Hoare și cantitatea de cod necesară este surprinzător de mică considerând viteza excelentă a algoritmului.

În general, sortarea prin segmentare implică selectarea unui element dintr-un tablou și rearanjarea tuturor elementelor rămase în subtablouri astfel că toate elementele care sunt mai mici decât elementul selectat sunt puse într-un subtablou stâng și toate elementele care sunt mai mari decât elementul selectat sunt puse într-un al doilea subtablou, referit ca subtablou drept. Subtablourile stâng și drept sunt apoi sortate prin același algoritm. Algoritmul de sortare prin segmentare este în esență

recursiv.

Primul pas în sortarea prin segmentare este să se selecteze un element arbitrar din tablou. Această selecție se bazează de regulă pe schema (ii) de descompunere recurentă, care selectează elementul din mijlocul tabloului, fiind mai eficientă decât schema (i) care selectează primul element al tabloului.

Metoda de sortare prin segmentare pentru tabloul de chei $A[1], \dots, A[N]$ este descrisă prin procedura recursivă QSORT cu procedura de control QUICK SORT care optimizează recursia prin minimizarea stivei de execuție. Algoritmul de sortare prin segmentare este un algoritm optimal în clasa algoritmilor de sortare prin comparații, complexitatea timp a sa fiind de ordinul $N \cdot \log_2 N$, unde N reprezintă numărul cheilor de sortat.

Subtabloul în sortarea curentă este referit prin: $A[\text{Primul}], \dots, A[\text{Ultimul}]$, iar VM reprezintă valoarea din mijlocul său: $VM = A[M]$, unde M reprezintă indicele elementului din mijlocul subtabloului folosit curent în algoritmul de sortare prin segmentare.

După ce se termină apelurile recursive pentru a partiționa subtablourile stângi, se începe partiționarea subtablourilor drepte în ordine inversă.

procedure QUICKSORT (var A: arrayA; N: integer);

procedure QSORT (Primul, Ultimul: integer);

var i, j, VM, Aux: integer;

begin

i := Primul;

j := Ultimul;

VM := A[(Primul + Ultimul) div 2];

repeat

while A[i] < VM **do**

i := i + 1;

while A[j] > VM **do**

j := j - 1;

if i ≤ j **then**

begin {schimbă A[i] cu A[j]}

Aux := A[i];

A[i] := A[j];

A[j] := Aux;

i := i + 1;

j := j - 1;

end;

until i > j;

if Primul < j **then** QSORT (Primul, j);

if i < Ultimul **then** QSORT (i, Ultimul);

end; {QSORT}

begin

QSORT (1, N);

end; {QUICKSORT}

În aplicații practice, algoritmul se aplică pentru sortarea unui tablou de articole, cheia de sortare fiind un câmp component al articolului. Considerăm un tablou EList de N elemente de tip articol. Definim tipul DataList al variabilei structurate EList prin:

type

dataList = array[1 .. N] of **record**

inf1: string;

cheie: string;

inf2: string;

end;

Cheia de sortare va fi referită prin EList[indice].cheie.

Versiunea procedurii PASCAL pentru sortarea crescătoare a tabloului de articole EList este:

procedure QUICKSORT (var EList: DataList; N: integer);

procedure QSORT (Primul, Ultimul: integer);

var i, j, VM, Aux: integer;

begin

i := Primul;

j := Ultimul;

VM := EList [(Primul + Ultimul) div 2].cheie;

repeat

while EList[i].cheie < VM **do**

i := i + 1;

while EList[j].cheie > VM **do**

j := j - 1;

if i ≤ j **then**

begin {schimbă EList[i] cu EList[j]}

Aux := EList[i];

EList[i] := EList[j];

EList[j] := Aux;

i := i + 1;

j := j - 1;

end;

until i > j;

if Primul < j **then** QSORT (Primul, j);

if i < Ultimul **then** QSORT (i, Ultimul);

end; {QSORT}

begin

QSORT (1, N);

end; {QUICKSORT}

b) Algoritmul de căutare binară standard

Presupunem că avem un tablou A liniar ordonat: $A[1] < A[2] < \dots < A[N]$ și cheia de căutare x de același tip cu elementele tabloului. Pentru a localiza cheia x în cadrul tabloului se compară x cu $A[\lfloor N/2 \rfloor]$ (o cheie cât mai apropiată de mijlocul tabloului). Dacă $x = A[\lfloor N/2 \rfloor]$ căutarea se termină cu succes.

Dacă $x > A[\lfloor N/2 \rfloor]$ lăsăm deoparte $A[1], \dots, A[\lfloor N/2 \rfloor]$.

Dacă $x < A[\lfloor N/2 \rfloor]$ lăsăm deoparte $A[\lfloor N/2 \rfloor], \dots, A[n]$.

Repetăm procesul lăsând deoparte de fiecare dată jumătate din chei, până când cheia de căutare x este localizată cu sau fără succes în sensul problemei de căutare. Variabila Poziție furnizează indicele elementului căutat.

Algoritmul de căutare binară standard este în esență recursiv. Căutarea cheii x în tabloul de chei ordonat liniar $A[1] < A[2] < \dots < A[N]$ poate fi descrisă în PASCAL prin procedura BSEARCH cu procedura de control BINSEARCH:

```
procedure BINSEARCH (var A: arrayA; var x: integer;
                    Primul, Ultimul: integer;
                    var Poziție: integer);
```

```
var
```

```
    Mijloc: integer;
```

```
procedure BSEARCH;
```

```
begin
```

```
    if Primul > Ultimul
```

```
    then Poziție := 0
```

```
    else begin
```

```
        Mijloc := (Primul + Ultimul) div 2;
```

```
        if x = A[Mijloc]
```

```
        then Poziție := Mijloc
```

```
        else if x < A[Mijloc]
```

```
            then begin
```

```
                {caută în prima jumătate a subtabloului}
```

```
                Ultimul := Mijloc - 1;
```

```
                BSEARCH
```

```
            end
```

```
        else begin
```

```
            {caută în a doua jumătate a subtabloului}
```

```
            Primul := Mijloc + 1;
```

```
            BSEARCH
```

```
        end
```

```
    end
```

```
end; {BSEARCH}
```

```
begin {BINSEARCH}
```

```
    BSEARCH
```

```
end; {BINSEARCH}
```

Considerăm acum problema de căutare binară într-un tablou de articole EList, ordonat liniar crescător după câmpul EList[]. cheia, folosind cheia de căutare CCheie.

Metoda de căutare binară standard este descrisă prin procedura recursivă BSEARCH folosind procedura de control BINSEARCH.

```
procedure BINSEARCH (var EList: DataList;
                    var CCheie: string;
                    Primul, Ultimul: integer;
                    var Poziție: integer);
```

```
var
```

```
    Mijloc: integer;
```

```
procedure BSEARCH;
```

```
begin
```

```
    if Primul > Ultimul
```

```
    then Poziție := 0
```

```
    else begin
```

```
        Mijloc := (Primul + Ultimul) div 2;
```

```
        if CCheie = EList[Mijloc].cheie
```

```
        then Poziție := Mijloc
```

```
        else if CCheie < EList[Mijloc].cheie
```

```
            then begin
```

```
                {caută în prima jumătate a subtabloului}
```

```
                Ultimul := Mijloc - 1;
```

```
                BSEARCH
```

```
            end
```

```
        else begin
```

```
            {caută în a doua jumătate a subtabloului}
```

```
            Primul := Mijloc + 1;
```

```
            BSEARCH
```

```
        end
```

```
    end
```

```
end; {BSEARCH}
```

```
begin {BINSEARCH}
```

```
    BSEARCH
```

```
end; {BINSEARCH}
```

În practică se folosește de obicei varianta nerecursivă a algoritmului de căutare standard. Dăm descrierea acesteia pentru căutarea valorii CCheie în tabloul de articole EList sub forma procedurii PASCAL cu numele CAUTARE_BIN:

```
procedure CAUTARE_BIN (var EList: DataList;
                    CCheie: string;
                    Primul, Ultimul: integer;
                    var Poziție: integer);
```


CAPITOLUL VI

INDICAȚII PENTRU PROBLEME PROPUSE

I § 2. 1. Din $n^2 - n \cdot a_n + 1 = 0$ și $n^2 + (2 - a_{n+1})n + 2 - a_{n+1} = 0$ prin scădere deducem (1) $n(2 - a_{n+1} + a_n) = a_{n+1} - 1$. Trecem n în $n + 1$ și regrupăm după n : (2) $n(2 - a_{n+2} + a_{n+1}) = 2a_{n+2} - a_{n+1} - 3$. Prin împărțire din (1) și (2):

$$a_{n+2} = \frac{a_n a_{n+1} + 3a_n + 4}{3 + 2a_n - a_{n+1}}$$

2. Din $(\beta_0), (\alpha_0), (\alpha_1), (\beta_1)$ rezultă succesiv $a_0 = 1, a_1 = 3, a_2 = 7, a_3 = 13$. Prin inducție se constată că pentru orice $n \geq 2, (\alpha_n), (\beta_n)$ precizează a_{2n} respectiv a_{2n+1} . Se constată că $a_n = n^2 + n + 1$ satisface $(\alpha_n), (\beta_n)$. Acum (γ_n) revine la evidenta $(n^4 + n^2 + 1) = (n^2 + n + 1)(n^2 - n + 1)$.

3. Din (R) calculăm x_3, x_4, x_5 și bănuim $x_n = \frac{y_n}{n}$ cu $y_n = An^2 + Bn + C$.

Găsim $x_n = \frac{n^2 + 1}{n}$ și verificarea lui (R) reproduce calculul din problema 1.

I § 3. 1. Pentru $a = -\frac{1}{2}, x_n = \frac{1 - a^n}{1 - a}, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{2}{3}$. 2. $x_n = 1 + \frac{1}{2}(n - 1) \rightarrow +\infty$.

3. a) $x_n \rightarrow 6$; b) x_n este șir constant, $x_n = 1$.

4. Pentru $a = 0, x_n \rightarrow 1$. Pentru $a = 1, x_n \rightarrow +\infty$. Pentru $0 \neq a \neq 1$,

$$x_n = \frac{1}{1 - a} - \frac{a + 1}{2(1 - a)} \cdot a^n \text{ converge dacă și numai dacă } a \in (-1, +1).$$

5. a) $x_{2n} \rightarrow -2$ și $x_{2n+1} \rightarrow +2 \neq -2$. b) $x_{2n} = 0, x_{2n+1} = 2$.

6. $x_n = 2^{1-n} \left[n - \frac{1}{2} \right] \rightarrow 0$. 7. $x_n = a^n + \sum_{k=0}^n b^k \cdot a^{n-k}$ converge dacă și numai

dacă $(a, b) \in (-1, +1) \times (-1, +1) \cup \{(0, 1)\}$.

8. Găsim $x_n = c \cdot (-2)^{-n} + \left(3n - \frac{3}{2} \right) \cdot 2^{-n} \rightarrow 0$. 9. Există un polinom P de

grad cel mult trei încât $x_n = C \cdot a^n + 2^{-n} \cdot P(n)$ și convergența impune $-1 < a \leq 1$.

10. Avem $x_p = p \cdot 2^{p-1} + (2^{p-1} - 1)$ și conform teoremei lui Fermat $p \mid (2^{p-1} - 1)$ deci $p \mid x_p$. Desigur, $x_p > p$, deoarece (x_n) este strict crescător.

11. a) Constatăm $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$. Direct din recurență,

$$x_n - x_{n+1} = \ln \frac{n+1}{n} - \frac{1}{n}. \text{ Folosind eventual } \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} \text{ se deduce}$$

$n \cdot \ln \frac{n+1}{n} < 1 < (n+1) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$ deci $x_n > 0$ descrește monoton. Pentru

$c = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ deducem $0 < c < 1$. (De notat valoarea aproximativă

var

Mijloc: integer;

begin

Poziție: = 0;

if EList [1]. cheie $\leq$ CCheie and CCheie $\leq$ EList [N]. cheie

then begin

Primul: = 1;

Ultimul: = N;

while (Primul $\leq$ Ultimul and Poziție = 0) do

begin

Mijloc: = (Primul + Ultimul) div 2;

if CCheie > EList [Mijloc]. cheie

then Primul: = Mijloc + 1

else if CCheie < EList [Mijloc]. cheie

then Ultimul: = Mijloc - 1

else Poziție: = Mijloc

end

end; {CAUTARE_BIN}

Algoritmul de căutare binară standard este un algoritm optimal în clasa algoritmilor de căutare, având complexitatea timp de ordinul $N \cdot \log_2 N$, unde N reprezintă numărul cheilor în lista în care se face căutarea.

$$c = 0,57721566490... \approx \frac{228}{395}.) \quad b) \text{ Se deduce } y_n = \frac{x_n + \ln n}{\ln n} \rightarrow 1,$$

$$z_n = 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2} \ln(2n+1) = x_{2n+1} - \frac{1}{2} x_n + \frac{1}{2} \ln \frac{2n+1}{n} = \frac{1}{2}(c + \ln 2),$$

$$t_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(2k+1)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k+1} = (x_n + \ln n) - 2 \left[z_n - 1 + \frac{1}{2} \ln(2n+1) \right] =$$

$$= 2(x_n - x_{2n+1}) + 2 \left(1 + \ln \frac{n}{2n+1} \right), \text{ deci } t_n \rightarrow 2(1 - \ln 2).$$

1 § 4. 1. Ecuația caracteristică $r^3 - 1 = 0$, $x_n = c_1 + c_2 \cos \frac{2n\pi}{3} + c_3 \sin \frac{2n\pi}{3}$

2. Se constată că are loc $x_{n+2} = 2x_{n+1} - x_n + 2$.

3. Desigur, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 4$.

4. Desigur, $a = 0$, $b = 1$, $c = 8$, $d = 27$.

5. $x_n = \frac{1}{2}(x_{n-2} + x_{n-1})$, $n \geq 2 \Rightarrow x_n = c_1 + c_2 \cdot (-2)^{-n}$, $x_n \rightarrow c_1 = \frac{x_0 + 2x_1}{3}$.

6. a) $x_n \rightarrow \infty$. b) $x_n = 2^{-n}(n+1) \rightarrow 0$. c) $x_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot (-2)^{-n} \rightarrow \frac{1}{3}$.

7. Rădăcinile ecuației caracteristice sunt $u = \frac{1}{2}(\alpha - \sqrt{\alpha^2 + 1}) < 0$ și

$v = \frac{1}{2}(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 1})$, $x_n = u^n - \frac{au}{\sqrt{\alpha^2 + 1}} \cdot v^n$. a) Pentru convergență este

necesar și suficient $-1 < u < 0 < v \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{3}{4} < \alpha \leq \frac{3}{4}$. b) Pentru $-\frac{3}{4} < \alpha < \frac{3}{4}$,

$x_n \rightarrow 0$ iar pentru $\alpha = \frac{3}{4}$, $x_n \rightarrow \frac{a}{5}$. Deci $\alpha = \frac{3}{4}$, $c = 5$. c) $\alpha > \frac{3}{4}$ și $a > 0$.

8. $x_n = \frac{4}{3}(-1)^{n+1} + \frac{4}{3}(2)^{-n}$. $x_{2n} \rightarrow -\frac{4}{3}$, $x_{2n+1} \rightarrow \frac{4}{3}$.

9. a) $x_n = 2^n \rightarrow \infty$. b) $x_n = 1 \rightarrow 1$. c) $x_n = \cos \frac{n\pi}{3} + \sqrt{3} \sin \frac{n\pi}{3}$, diverge.

d) $x_n = 1 + 2^n + (-2)^{-n}$, diverge. e) $x_n = 5 \cdot 2^{n-1} + (\sqrt{2})^{n-2}$.

$\left[\cos \frac{n\pi}{3} - 11 \sin \frac{n\pi}{3} \right]$, diverge. f) $x_n = \frac{-10}{3} \cdot 4^n + 8 \cdot 3^n + n - \frac{5}{8} \rightarrow -\infty$.

10. $x_n = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{n\pi}{3}$ este divergent.

11. Soluția generală $x_n = c_1 + c_2 \cdot (2^n) + Q_2(n)$ este divergentă.

12. Avem $x_n = c_1 + c_2 \left(-\frac{3}{5}\right)^n$, și $x_n \rightarrow c_1 = \frac{1}{8}(3a + 5b)$.

13. $x_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}$, $\frac{x_{n+1}}{x_n} \rightarrow a$.

14. Găsim soluția particulară a recurenței neomogene $z_n = -\frac{1}{3}n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{7}{6}n + D$ și apoi $x_n = 2 - a + (a - 1) \cdot 2^n - \frac{1}{3}n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{7}{6}n$.

15. $y_n = \frac{1}{x_n}$ este recurent liniar de ordin 2: $x_n = \frac{pq}{(p-q)n + 2q - p} \rightarrow 0$.

16. a) $x_n = \frac{1}{3}[2^{n+1} + (-1)^n]$; pentru inducție se arată că

$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{3}[2^n - 2 \cdot (-1)^n]$ este număr par. b) Prin calcul. c) c.m.m.d.c. este impar conform a) și divide $x_{n+2} - x_n = 2^{n+1}$ deci $d = 1$.

17. a) $x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$. b) Se scrie relația de recurență

pentru $n = 0, 1, \dots, m$ și se sumează. c) Prin calcul, folosind a).

18. a) $x_n = 1 + 2^n + 3^n$. b) $x_n \rightarrow \infty$; $\sqrt[n]{x_n} \rightarrow 3$. c) Apare șirul cu termen general $\sqrt[n]{y_n}$, $y_n = \frac{3^n}{n!}$. Din $\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{3}{n+1} \rightarrow 0$ rezultă $\sqrt[n]{y_n} \rightarrow 0$.

19. Găsim rapid relația de recurență liniară $ax_{n+3} + (b-a)x_{n+2} + (c-b)x_{n+1} + cx_n = 0$, cu ecuația caracteristică $(r-1)(ar^2 + br + c) = 0$. Avem $r_1 = 1$ și fie u , v rădăcinile trinomialului $ar^2 + br + c$. Dacă $\Delta > 0$, $x_n = A + Bu^n + Cv^n$, $x_n \rightarrow A$. Dacă $\Delta \leq 0$, $R = |u| = |v| < 1$ și $x_n = A + R^n(B \cos nt + C \sin nt) \rightarrow A = (a+b+c)^{-1}$.

20. $x_n = c_1 \cos nt + c_2 \sin nt$, $|x_n| < |c_1| + |c_2|$.

21. $x_n = c_1 + c_2(-2)^{-n} \rightarrow c_1 = \frac{1}{3}(x_0 + 2x_1)$.

22. $x_n = c_1 + 2^{-n}(c_2 + nc_3) \rightarrow c_1 = x_0 - 4x_1 + 4x_2$.

23. $x_n > 0$; $y_n = \ln x_n$ satisface $y_{n+1} = \frac{1}{2}(y_n + y_{n-1})$ și $y_1 = 0$, $y_2 = \ln 2$.

$y_n = c_1 + c_2(-2)^{-n} \rightarrow c_1 = \frac{1}{3} \ln 4$. Deci $x_n \rightarrow \sqrt[3]{4}$.

24. a) $x_n = (3 + \sqrt{5})^n + (3 - \sqrt{5})^n$. b) Prin inducție din $x_n = 2^n a_n$ și $x_{n+1} = 2^{n+1} a_{n+1}$ rezultă $x_{n+2} = 2^{n+2}(3a_{n+1} - a_n)$.

25. $x_n = c_1 + c_2 \left(\frac{-b}{a+b} \right)^n \rightarrow c_1 = \frac{2a+3b}{a+2b}$.

26. Din $x_{n+2}x_n = x_{n+1}^2 + 2$ și $x_{n+3}x_n = x_{n+2}^2 + 2$, prin scădere, rezultă $(E_n) \quad x_{n+1}(x_{n+3} + x_{n+1}) = x_n(x_{n+2} + x_n)$. Înmulțind membru cu membru (E_1) , (E_2) ,

..., (E_{n-1}) rezultă $x_{n+2} = 4x_{n+1} - x_n$.

27. Se arată inductiv că $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este monoton descrescător, mărginit inferior de 0. Din relația de recurență $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{c}{1-a-b}$.

28. - 30. Se sumează relații de recurență.

31. Se demonstrează (E_n) : $F_{n+1}^2 = F_{n+2} \cdot F_{n+1} - F_{n+1} \cdot F_n$ și se sumează (E_k) de la $k = 1$ la $n - 1$.

32. - 35. Prin inducție completă.

36. Ipoteza $m \mid n$ impune $n = m \cdot k$ și se demonstrează concluzia prin inducție după k , observând $F_{m(k+1)} = F_{mk+m} = F_{mk-1} F_m + F_{mk} F_{k+1}$.

37. $(F_{n+1}, F_{n+2}) = (F_{n+1}, F_n + F_{n+1}) = (F_n, F_{n+1}) = \dots = (F_0, F_1) = 1$.

38. Dacă $m = nq + r$, $(F_m, F_n) = (F_{nq+r}, F_n) = (F_{nq-1} F_r + F_{nq} F_{r+1}, F_n) = (F_{nq-1} F_r, F_n)$. Se demonstrează prin inducție după q : $(F_{nq-1}, F_n) = 1$ și rezultă: $m = nq + r \Rightarrow (F_m, F_n) = (F_n, F_r)$. Acum algoritmul lui Euclid pentru perechea (m, n) se transpune perechii (F_m, F_n) .

39. $5F_{n-4} + 3F_{n-5} = 2F_{n-4} + 3(F_{n-4} + F_{n-5}) = 2F_{n-4} + 3F_{n-3} = 2(F_{n-4} + F_{n-3}) + F_{n-3} = 2F_{n-2} + F_{n-3} = F_{n-2} + F_{n-1} = F_n$.

40. Avem $5 = F_4$ și $(5, F_n) = F_{(n,5)}$.

41. Suma a două coloane consecutive coincide cu următoarea.

42. Prin formula lui Binet, notând $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$ avem

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{\alpha^{n+1} - (-\alpha)^{-(n+1)}}{\alpha^n - (-\alpha)^{-n}} \rightarrow \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

43. Membrul I al ecuației se transcrie $x^2 F_{2n-2} + x(F_{2n-2} + F_{2n-1}) + F_{2n-1} = (x+1)[x F_{2n-2} + F_{2n-1}]$ și se folosește problema 37.

44. - 46. Se sumează relații de recurență.

47. Se sumează egalități $(L_{n+1})^2 = L_{n+1} L_{n+2} - L_n L_{n+1}$.

48. - 54. Se utilizează formule (de tip) Binet.

55. Sumând două coloane consecutive se obține următoarea coloană.

56. Este consecință pentru $\frac{L_{n+1}}{L_n} \rightarrow \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

I § 5.5. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -5$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = -1$. 6. $a \in \left(-\frac{5}{6}, \frac{1}{2}\right]$.

19. $x_n^2 - 2y_n^2 = 1$ și $z_n^2 = [(x_n - y_n)^2 + y_n^2] \cdot [(x_n + y_n)^2 + y_n^2]$.

22. $A = \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{m} & \sin \frac{2\pi}{m} \\ -\sin \frac{2\pi}{m} & \cos \frac{2\pi}{m} \end{pmatrix}$, $A^n = \begin{pmatrix} \cos \frac{2n\pi}{m} & \sin \frac{2n\pi}{m} \\ -\sin \frac{2n\pi}{m} & \cos \frac{2n\pi}{m} \end{pmatrix}$. Perioada este m .

23. Pentru $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $2 \cdot 3^n \cdot A = \begin{pmatrix} 3^n + 1 & 3^n - 1 \\ 3^n - 1 & 3^n + 1 \end{pmatrix}$.

I § 6.1. Deducem $x_{n+1} + y_{n+1} + z_{n+1} = (a+b+c)(x_n + y_n + z_n) = \dots = (a+b+c)^{n+1} \cdot (x_0 + y_0 + z_0) \rightarrow 0$.

2. Luând $A = \begin{pmatrix} a_n & 2c_n & 2b_n \\ b_n & a_n & 2c_n \\ c_n & b_n & a_n \end{pmatrix}$ se găsesc recurențele $a_{n+1} = a_n + 2b_n + 2c_n$,

$b_{n+1} = a_n + b_n + 2c_n$, $c_{n+1} = a_n + b_n + c_n$. Găsim $b_{n+1} = c_{n+1} + c_n$, $a_{n+1} = b_{n+1} + b_n = c_{n+1} + c_n + c_n + c_{n-1} = c_{n+1} + 2c_n + c_{n-1}$ și $c_{n+2} = a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} = (c_{n+1} + 2c_n + c_{n-1}) + (c_{n+1} + c_n) + c_{n+1} = 3c_{n+1} + 3c_n + c_{n-1}$, recurență liniară omogenă de ordin 3 cu coeficienți constanți, etc.

3. Constatând $x_n > 0$, $y_n > 0$, $z_n > 0$ se logaritmează.

I § 7.1. Folosind $x_{n+1}^2 - x_n^2 = p(x_n - x_{n-1})$ constatăm: $x_1 = x_0 \Rightarrow x_n = x_0$;

$x_1 > x_0 \Rightarrow x_{n+1} > x_n$ și $x_{n+1} < \frac{1}{2} \left[p + \sqrt{p^2 + 4q} \right]$; $x_1 < x_0 \Rightarrow 0 < x_{n+1} < x_n$.

2. Prin inducție, $x_n \in [0, 1]$. $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{x_n + 1}{x_n^2 + 1} \geq 1$ asigură monotonia; $l = 1$.

3. Prin inducție, $x_n \in [0, 1]$. $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}(x_n - x_{n-1})(x_n + x_{n-1})$ asigură

monotonia crescătoare. Limita este $1 - \sqrt{1-a}$.

4. $x_{n+1} - x_n = (x_n - 2)^2$ asigură monotonia crescătoare. Pentru $a < 2$ are loc $x_n < 2$. Pentru $a = 2$ și $a = 1$ șirul este constant. Pentru $a > 2$ șirul diverge la $+\infty$.

5. $a = 0 \Rightarrow$ șir constant 0. Pentru $a \in (0, 1)$ avem $0 < x_2 < \dots$

$\dots < x_{2n} < x_{2n-1} < \dots < x_1 < 1$. Limitele pe subșiruri sunt egale cu $\sqrt{1+a} - 1$.

6. $x_0 = \cos t \Rightarrow x_n = \cos 2^{-n}t$.

7. Prin inducție $x_n > 0$. $\ln(1+x) < x$ asigură monotonia descrescătoare.

8. Inegalitatea $x < e^{-1+x}$ asigură monotonia crescătoare spre ∞ .

9. $\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{a_n}{b_n} = \dots = \frac{a}{b}$. Prin exemplul 7 șirurile converg la $\sqrt{a/b}$.

10. $(3x_n^2 + a)(x_{n+1} - x_n) = 2x_n(a - x_n^2)$ și $(3x_n^2 + a)(x_{n+1}^2 - a) = (x_n^2 - a)^3$.

Urmează $x_0 < \sqrt{a} \Rightarrow$ șir crescător mărginit superior de $\sqrt{a}$. $x_0 = \sqrt{a} \Rightarrow$ șir constant. $x_0 > \sqrt{a} \Rightarrow$ șir descrescător la $\sqrt{a}$.

11. $(2x_n^3 + a)(x_{n+1} - x_n) = x_n(a - x_n^3)$ și $(2x_n^3 + a)(x_{n+1}^3 - a) = (x_n^3 - a)^3$.
 $= (x_n^3 - a)^3 (x_n^3 + a)$ permit o explicitare analogă celei din problema 10.

12. $x_0 = 2\cos t \Rightarrow x_n = 2\cos 3^n t$.

13. $x_{n+1} - x_n = -x_n^2(x_n^2 - x_n + 1) < 0$.

I § 8. 1. $x_n > 0$. $x_n = 4 \cdot \frac{[(-1)^n + 4^{n-1}]a + [(-1)^{n+1} + 4^{n-1}]}{[(-1)^{n+1} + 4^n]a + [(-1)^n + 4^n]} \rightarrow 1$. Șirul este bine

definit pentru $\alpha \in \left\{ \frac{1+16^p}{1-16^p} \mid p \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ \frac{1-4 \cdot 16^p}{1+4 \cdot 16^p} \mid p \in \mathbb{N} \right\}$,

2. Se constată $x_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Monotonia este asigurată de identitatea $(x_{n+1} - x_n)(a + x_n)(a + x_{n-1}) = 2a^2(x_n - x_{n-1})$; crescătoare pentru $x_0 < a$, descrescătoare pentru $x_0 > a$. (Pentru $x_0 = a$ șirul este constant.) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$,

$\inf_{n \in \mathbb{N}} x_n = \min(a, x_0)$, $\sup_{n \in \mathbb{N}} x_n = \max(a, x_0)$

3. $x_n > 0$ asigură buna definire. Șirul descrește monoton la $\sqrt{a} = \inf_{n \in \mathbb{N}} x_n$, pornind de la $a = x_0 = \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n$.

4. Cu $x_n = \frac{y_{n+1}}{y_n} + \frac{5}{2}$ obținem $y_n = 4^{-n} \left[c_1 (-3 - \sqrt{41})^n + c_2 (-3 + \sqrt{41})^n \right]$,

$c_1 \neq 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{-3 - \sqrt{41}}{4}$ deci $x_n \rightarrow \frac{-3 - \sqrt{41}}{4} + \frac{5}{2} = \frac{7 - \sqrt{41}}{4}$.

5. Găsim $x_{n+2} = x_n$, deci șir periodic. Alternativa de a fi constant revine la $x_1 = 0 \Leftrightarrow x_0^2 - 2x_0 + 5 = 0$, imposibil. Șirul este divergent.

6. Rădăcinile ecuației caracteristice: -1 și 3 . Cu substituția $y_n = \frac{x_n - 3}{x_{n+1}}$ avem

$y_n = \frac{1}{3} y_{n-1} = 3^{-n} y_0 \rightarrow 0$, deci $x_n \rightarrow 3$.

7. $x_n \notin \{-1, 0, 1\}$. Pentru $n = 4k, 4k+1, 4k+2, 4k+3$ avem respectiv $x_n = x_0, x_n = x_1, x_n = x_2, x_n = x_3$. Este divergent deoarece $x_0 \neq x_1$. $x_{1994} = 40 \Rightarrow x_2 = 40 = -\frac{1}{x_0}$. Cele 4 valori luate ciclic de x_n sunt $-\frac{1}{40}, -\frac{41}{39}, 40, \frac{39}{41}$.

8. $x_{n+4} = x_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

9. Vezi problema 3 pentru $a = 1979$.

10. Matricea A asociată satisface $A^2 = 5A - 6 \cdot I_2$.

$$x_n = \frac{(2 \cdot 3^{n-1} + 1) \cdot 2a + 1 - 2 \cdot 3^{n-1}}{(2 \cdot 3^{n-1} - 1) \cdot 2a + 5 - 2 \cdot 3^{n-1}} \rightarrow 1.$$

11. $x_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Dacă x_n converge, limita va fi rădăcina pozitivă $r_2 = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{1+4a})$ a ecuației caracteristice. Cu $y_n = \frac{x_n - r_2}{x_n - r_1}$ avem

$y_{n+1} = \frac{1 - \sqrt{1+4a}}{1 + \sqrt{1+4a}} y_n \rightarrow 0$, etc. 12. Analog precedentei.

13. $3y_{n+1} = y_n \rightarrow 0$, deci $x_n \rightarrow -1$. 14. $2y_{n+1} = -y_n \rightarrow 0$, deci $x_n \rightarrow 2$.

15. $x_0 = \sqrt{3} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$, $x_1 = a = \operatorname{tg} t \Rightarrow x_n = \operatorname{tg} \left(t + \frac{n-1}{3} \pi \right)$. Perioada este 3.

17. $\sqrt{2} - 1 = \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}$, perioada este 8.

18. $x_2 = \frac{1}{1-x_0}$, $x_3 = x_0$. Șir neconstant de perioadă 3.

19. Se asigură buna definire $x_n \in \mathbb{R}$.

25. Deși aceste șiruri au mai fost explicitate sugerăm aici rezolvarea prin formulele (20) - (22) din I § 8 după rearanjarea recurențelor sub forma:

$$a) u_{n+1} = \sqrt{a} \frac{(u_n + \sqrt{a})^2 + (u_n - \sqrt{a})^2}{(u_n + \sqrt{a})^2 - (u_n - \sqrt{a})^2}; \quad b) u_{n+1} = \frac{(u_n + 1)^3 + (u_n - 1)^3}{(u_n + 1)^3 - (u_n - 1)^3};$$

$$c) u_{n+1} = \frac{\sqrt{u_n + 1} + \sqrt{u_n - 1}}{\sqrt{u_n + 1} - \sqrt{u_n - 1}}.$$

26. Vor exista pentru orice $n \in \mathbb{Z}$ constante u_n, v_n încât $n < x < n+1 \Rightarrow \Rightarrow F(x) = u_n x + v_n$. Rezultă $u_{n+1}(x+1) + v_{n+1} - 2(u_n x + v_n) = a$, deci $u_{n+1} = 2 \cdot u_n$ și $u_{n+1} + v_{n+1} - 2v_n = a$. Urmează $u_n = 2^n u_0, v_{n+1} - 2v_n = c - 2^{n+1} u_0$. Continuitatea impune $v_{n+1} - v_n = -(n+1) \cdot 2^n u_0$ deci $v_n = -a - (1+n) \cdot 2^n u_0$ și $F(0) = b$ impune $u_0 = -(a+b)$.

27. a) Ecuația caracteristică $y^3 - y^2 - y - 1 = 0$, admite o rădăcină reală $y_1 = \alpha^2$ unde $1,8 < \alpha^2 < 1,9$ deci (*) $1,34 < \alpha < 1,37$. Celelalte două rădăcini satisfac (**) $y^2 + (\alpha^2 - 1)y + (\alpha^4 - \alpha^2 - 1) = 0$. Discriminantul ei este $\Delta = -3\alpha^4 + 2\alpha^2 + 5 = (\alpha^2 + 1)(5 - 3\alpha^2) < 0$, deci $y_{2,3} = r(\cos \theta \pm i \sin \theta)$.

Avem $r^2 = y_2 \cdot y_3 = \alpha^4 - \alpha^2 - 1 = \frac{1}{\alpha^2}$ deci $r = \frac{1}{\alpha}$ și $\cos \theta = \frac{\alpha}{2}(1 - \alpha^2)$. Din

(*) rezultă $0,536 < -\cos \theta < 0,6201$ deci θ satisface $2,13 < \theta < 2,24$.

b) Introducând d prin $c \cdot \sqrt{\alpha^4 - 2\alpha^2 + 3} = 2 \cdot d \cdot \alpha$, determinarea constantelor a, b, c din condițiile inițiale impune $x_0 = a + b, x_1 = a\alpha^2 + \frac{b}{2}(1 - \alpha^2) + d$ și

$x_2 = a\alpha^4 + \frac{b}{2}\alpha^{-2}(-\alpha^4 + 2\alpha^2 - 1) + d(1 - \alpha^2)$ și urmează

$$a = \frac{2}{3} \left[x_0(-4\alpha^4 + 2\alpha^2 + 3) + x_1(\alpha^2 - 1) + x_2 \right].$$

Acum convergența în $\mathbb{R}$ a lui x_n revine la $a = 0$ și (**) este ireductibilă în $\mathbb{Q}$.

I § 9. 1. Prin $x_n \leq a^n x_0$ rezultă $x_n \rightarrow 0$.

2. Din $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \frac{x_n}{a + x_n} < 1$ rezultă că x_n este monoton strict descrescător;

mărginit inferior de zero $\rightarrow l \leq \frac{l^2}{a+l}$. Rezultă $l = 0 = \inf_{n \in \mathbb{N}} x_n$ și $\sup_{n \in \mathbb{N}} x_n = x_0$.

3. Din $0 > x_{n+1}^2 - x_n^2 = (x_{n+1} - x_n)(x_{n+1} + x_n)$ rezultă că $(x_n)_{n \geq 0}$ este strict descrescător. Dacă, prin absurd, $x_m < 0$, ar urma $x_{m+1} < x_m < 0$ și s-ar contrazice $x_m + x_{m+1} > 0$. Avem deci și mărginirea inferioară deci și convergența (la o limită ce nu se poate preciza).

4. $x_{n+1}^3 < x_n^3$ asigură stricta descresștere. Din $1 \leq x_{n+1} + x_n < 2x_n$ rezultă $1 < 2x_n$. Pentru limita 1 avem doar $\frac{1}{2} \leq l \leq \frac{1}{\sqrt[5]{2}}$.

5. Rezolvare analogă celei din I 11.

6. $\frac{1}{2}[x_n + (2a - x_{n+1})] \geq \sqrt{x_n(2a - x_{n+1})} > a \Rightarrow x_n > x_{n+1}$.

Mărginirea inferioară (prin zero) asigură existența limitei l . Deducem $0 \leq l \leq 2a$ și $l(2a - l) \geq a^2 \Leftrightarrow (l - a)^2 \leq 0$, deci $l = a$.

7, 8. Se particularizează mai sus $a = \frac{1}{2}$ sau $b = 2a$.

9. $\frac{1}{2}[x_{n+1} + (2 - x_n)] \geq \sqrt{(2 - x_n)x_{n+1}} > 1$ atrage $x_{n+1} > x_n$. Mărginit superior de 2 este convergent la 1. 10. Analog cu 9, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{p}{2}$.

11. Înmulțind inegalități enunțate rezultă $2^n \cdot n! \cdot x_n \leq (2n - 1)!! \cdot x_1$.

Folosind inegalitatea lui Stirling $\sqrt{2n+1} \cdot (2n - 1)!! < 2^n \cdot n!$ rezultă

$$0 < x_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} x_1 \text{ și } x_n \rightarrow 0.$$

12. $4x_{n+1}^3 - x_n^3 \leq -(x_n - 1)^3 \leq 0$ asigură $1 \leq x_{n+1} \leq x_n$ și urmează $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$.

13. $x_{n+1}^2 - x_n^2 \leq -(x_n - a)^2 \leq 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} x_n = a$ și $\sup_{n \in \mathbb{N}} x_n = x_0$.

14. $x_n(x_{n+1} - x_n) \leq -(x_n - 1)^2 \leq 0$; $x_n \rightarrow 1$.

15. Se demonstrează prin inducție $x_n \geq 1$ și $x_{n+1} \leq x_n$. Folosind $x_{n+1} + x_n \geq 2\sqrt{x_n x_{n+1}}$ se deduce $2\sqrt{x_n x_{n+1}}(x_{n+2} - x_{n+1}) \leq x_{n+1} - x_n \leq 0$. Rezultă că x_n descresște monoton la 1.

16. $x_{n+1}^3 - x_n^3 \leq -(x_n + 2)(x_n - 1)^2 \leq 0$ asigură descresșterea lui x_n la o limită $l \leq x_0$, $l = 1$. Dacă $x_0 = 1$ atunci $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n = 1$, $x_0 \notin [0, 1)$.

17. Considerăm șirul $(y_n)_{n \geq 1}$ cu $y_1 = x_1$ și $y_{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} y_k$. Se observă $y_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) y_n$, deci $y_n = n y_1 = n x_1$. Se demonstrează prin inducție $(x_n)^n \leq y_n$.

deci $x_n \leq \sqrt[n]{n x_1}$. Considerăm apoi $(z_n)_{n \geq 1}$ cu $z_1 = x_1$ și $z_{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} z_k$.

Deducem $\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) z_n = z_{n+1}$, apoi $z_n = \frac{n+2}{2} x_1 \leq (x_n)^n$, deci

$x_n \geq \sqrt[n]{\frac{n+2}{2}} x_1$. Din „cleștele” $\sqrt[n]{\frac{n+2}{2}} x_1 \leq x_n \leq \sqrt[n]{n x_1}$ rezultă $x_n \rightarrow 1$.

18. Inegalitatea recursivă asigură descresșterea monotonă la o limită a , urmează $a = 0$. Împărțind inegalitatea recursivă prin $a_n \cdot a_{n+1}$ rezultă

$$\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} \geq q \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} \geq q. \text{ Prin Stolz, } n a_n = q^{-1}.$$

21. Vezi I 11.

23. Pentru $a_n = \frac{8n-1}{8n+1}$ se arată prin inducție $\prod_{k=1}^n a_k < \sqrt{\frac{5}{8n+5}}$.

25. Avem $x_n \geq \left(x_{n+1} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$, $x_{n+1} - x_n \geq (x_{n+1} - 1)^2 \geq 0$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} x_n = 1, \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n = x_0 = a.$$

26. Notăm $y_n = x_n - 1$ și $a = |y_1| \in [0, 1)$. Avem: $(y_n)^{n+1} \leq y_{n+1} \leq (y_n)^{n+1}$; prin inducție $|y_n| \leq a^n$. Urmează $y_n \rightarrow 0$ deci $x_n \rightarrow 1$.

29. Se folosește inegalitatea lui Cebășev.

30. Din $x_{n+1} \leq x_n \cdot x_1$ rezultă $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq x_1 < 1$ deci șirul descresște monoton la 0.

II § 1. 1. Cu $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & \sin \frac{\pi}{4} \\ -\sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$ găsim $a_n = d_n = 2^{-n} \cos \frac{n\pi}{4}$ și

$$b_n = -c_n = 2^{-n} \sin \frac{n\pi}{4}, \text{ termeni convergenți la zero.}$$

2. Cu metoda 2, $x_{n+1} = 4x_n + y_n$, $y_{n+1} = -4x_n$, găsim $x_n = (c_1 + c_2 n) \cdot 2^n = n \cdot 2^{n-1}$, $y_n = -(n-1) \cdot 2^n$ deci $A^n = n \cdot 2^{n-1} \cdot A - (n-1) \cdot 2^n \cdot I_2$.

3. Se folosește metoda 2 deci recurențele (1).

4. Se utilizează problema 1. sau metoda 2.

5. Cu metoda 2, $a_{n+1} = 4a_n + b_n$, $b_{n+1} = -5a_n$. Găsim $a_n = \frac{1}{6}[5^n + (-1)^{n+1}]$,

$$b_n = \frac{-5}{6}[5^{n-1} + (-1)^n], \frac{a_n}{b_n} \rightarrow 1.$$

6. Cu metoda 2, $A^2 = (a+d)A$, deci $r = a+d$. Se continuă cu metoda 5.

7. Vezi exemplul 3.

$$8. A^2 = -I_2, A^4 = I_2.$$

$$9. A \in \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{C} \right\}.$$

14. Egalitățile provin din $A^{n+m} = A^n \cdot A^m$ respectiv $\det(A^n) = (\det A)^n$.

$$15. 4) \text{ Se deduc egalitățile: } 5L_{m+n+1} = (L_{m+1} + 2L_m)L_{n+1} + (L_m + 2L_{m-1})L_n \\ 5L_{m+n} = (L_{m+1} + 2L_m)L_n + (L_m + 2L_{m-1})L_{n-1} = (2L_{m+1} - L_m)L_{n+1} + (2L_m - L_{m-1})L_n. \\ 5L_{m+n-1} = (2L_{m+1} - L_m)L_n + (2L_m - L_{m-1})L_{n-1}.$$

$$16. A^n = \begin{pmatrix} z^n & nz^{n-1}w \\ 0 & z^n \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

18. $A^{p+1} = A^p \Rightarrow (\det A)^p \cdot \det(A - I) = 0$. Dacă $\det A = 0$, atunci $A^2 = A$, deci $A^n = A$. Dacă $\det A \neq 0$, A este inversabilă, $A^{p+1} = A^p \Rightarrow A = I_2$ deci $A^n = A$.

19. Deoarece $A^3 = -I$ și $A^6 = -I$ vor fi cel mult șase elemente.

20. $A^k = 0 \Rightarrow \det A = 0$ și ecuația caracteristică se reduce la $A^2 - t \cdot A = 0$. Din $A^k = 0$ urmează $A^{k-1} = 0$ pentru $k \geq 3$.

$$21. A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+u^n & 1-u^n \\ 1-u^n & 1+u^n \end{pmatrix} \text{ cu } u = \cos x.$$

22. Notând $\text{Tr } X = a$, deducem $X^2 = aX$, $X^n = aX^{n-1}$, $a^n = 8$ și $n = 3$.

$$23. \text{ Luând } A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B^2 = -I, X = aI + bA \text{ cu } (a+ib)^n = -1, (a-ib)^n = 1.$$

$$24. A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}; A = I + 4B \text{ cu } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, B^2 = 0 \text{ și } A^n = I + 4nB.$$

$$25. \text{ Pentru } k = 0, n-1 [i] u = \frac{2k\pi}{n}, X = \begin{pmatrix} \cos u & -\sin u \\ \sin u & \cos u \end{pmatrix} \text{ este soluție.}$$

$$26. A^n = \begin{pmatrix} \cos nt + \sin nt & -2\sin nt \\ -2\sin nt & \cos nt - \sin nt \end{pmatrix}, n \in \mathbb{N}^+.$$

27. Avem: $A^n = x_n A + y_n I$ unde $(k-1)x_k = (k+1)(k^{n+1} - 1)$ și $(k-1)y_k = (k+1)(k^{n-1} - 1)$.

28. Notând $\text{Tr } X = t$, deducem $X^2 = tX$, $X^n = t^{n-1}X$, și $t^n = 16$.

29. Polinomul caracteristic al lui A , $X^2 - uX + v$, cu $u > 2$ este prim cu polinomul $X^n - 1 = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^+$.

II § 2. 1. Găsim $a_n = b_n = n$.

$$2. \text{ Scriind } A^n = I + B, \text{ găsim } B^3 = O_3 \text{ și } A^n = I + nB + \frac{n(n-1)}{2} B^2.$$

$$3. \text{ Se observă } A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A^3 = 2 \cdot A$$

$$4. \text{ Găsim } a_{n+1} = a_n + 3n + 2, b_{n+1} = b_n + 3 \text{ deci } a_n = \frac{n(3n+1)}{2}, b_n = 3n.$$

$$7. \text{ Avem } a_1 = 1, b_1 = 0, c_1 = 2 \text{ și } a_{n+1} = a_n + 1, b_{n+1} = 2a_n + b_n, c_{n+1} = c_n + 2.$$

Se obține $a_n = n, b_n = n(n-1), c_n = 2n$.

$$8. a_{n+1} = a_n - 2b_n, b_{n+1} = -a_n, 3a_n = 2^{n-1} + (-1)^n, 3b_n = (-1)^n - 2^n,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = -\frac{1}{2}.$$

$$9. a_n = \frac{1}{2} + a_{n-1} = \frac{n}{2}, b_n = b_{n-1} + \frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{1}{3} = \frac{n(3n+5)}{24}.$$

$$11. A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & na \\ -na & 1 & -\frac{n^2 a^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B^n = \begin{pmatrix} 1 & na & 2na(na+1) \\ 0 & 1 & 4na \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$12. \text{ Pentru } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ și } C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ avem } BC = CB, A = C - B.$$

$$A^{2k} = (2^{2k} - 1)C + I, A^{2k+1} = (2^{2k+1} + 1)C - B.$$

$$13. A = a \cdot M + b \cdot I, B = a \cdot I + b \cdot N.$$

$$14. A^n = x_n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + y_n \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$15. a) A^3 = a \cdot I, A^{3k} = a^k \cdot I, A^{3k+1} = a^k \cdot A, A^{3k+2} = a^k \cdot A^2.$$

$$b) B_n = A^n(I + A + A^2), \det B_n = a^n(1-a)^2, a \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}.$$

$$c) \sum_{k=1}^n \det B_k = a(1-a)(1-a^n).$$

$$16. \text{ Se scrie } A = I + a \cdot J + b \cdot K, J^2 = K, JK = KJ = K^2 = 0.$$

$$17. A^3 = I, \det(I + \lambda A + \lambda^2 A^2) = (\lambda - 1)^2(\lambda^2 + \lambda + 1)^2.$$

$$20. B = \begin{pmatrix} k-1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1-k \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1-k & -1 \\ 1-k & (k-1)^2 & k-1 \\ -1 & k-1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$22. n \geq 3 \Rightarrow A^n = 0 \text{ și } B^n = 0. C^n = (I + A + B)^n = I + nC + \frac{n(n-1)}{2} B,$$

$$D^n = (\lambda \cdot I + A)^n = \lambda^n I + n\lambda^{n-1} A + \frac{n(n-1)}{2} \lambda^{n-2} \cdot B.$$

$$24. A = a^p \cdot B + pI, B^n = 3^{n-1} \cdot B, 3A^n = (3a^p + p)^n \cdot B + p^n(3I - B).$$

II § 3. 1. Se scrie $A = I + B$, cu $B^n = 0$ pentru $n \geq 3$.

2. Condiția impune $\alpha(t+u) = \alpha(t) + \alpha(u) + 4tu$, $\beta(t+u) = \beta(t) + \beta(u) + t\gamma(u) + 6u\alpha(t)$ și $\gamma(t+u) = \gamma(t) + \gamma(u) + 24tu$. Se determină $\alpha(x) = 2x + 2x^2$, $\beta(x) = 3x + \frac{17}{2}x^2 + 4x^3$ și $\gamma(x) = 5x + 12x^3 - 3x^4$. Desigur $[A(t)]^n = A(nt)$.

3. Se scrie $A = aI + (b-a)B, B^2 = I$, etc.

4. Se scrie matricea A „celular” $A = \begin{pmatrix} O & X \\ X & O \end{pmatrix}$ unde $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Se constată } A^{2k} = \begin{pmatrix} X^{2k} & O \\ O & X^{2k} \end{pmatrix}, A^{2k+1} = \begin{pmatrix} O & X^{2k+1} \\ X^{2k+1} & O \end{pmatrix}.$$

Pentru $X^n = \begin{pmatrix} a_n & c_n \\ b_n & a_n \end{pmatrix}$ se explicitază $2a_n = (1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n$,

$$2\sqrt{2}b_n = (1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n = \sqrt{2}c_n.$$

5. Se găsește A^2 o matrice „șah” cu elemente n și 0 , apoi $A^3 = n(n+1)A$, $A^4 = n(n+1)A^2$, $A^5 = n(n+1)^2A$ spre a exprima A^{2n} și A^{2n+1} .

6. Fie $B = A + I$, matricea cu toate elementele 1 . $B^2 = n \cdot B$, $B^k = n^{k-1} \cdot B$.

Urmează $A^n = (B - I)^n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k C_n^k \cdot B^{n-k} + (-1)^n I_n = \lambda_n \cdot B + (-1)^n I_n$ unde

$$n \cdot \lambda_n = (n-1)^n - (-1)^n.$$

7. Din $A + B = I_n$, amplificând la stânga și apoi la dreapta cu B deducem $AB = BA$. Pentru $k \geq 1$ și $h \geq 1$ se demonstrează $A^k B^h = O_n$.

8. Dacă $A^2 = aA - I_n$ găsim $(x_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ cu $x_1 = 1$, $x_2 = a$ încât $A^m = x_m A - x_{m-1} I_n$,

relația de recurență fiind $x_{m+1} = ax_m - x_{m-1}$, deci $x_m \cdot \sqrt{4-a^2} = 2 \sin(mt)$, formulă ce se conservă și pentru $m < 0$, $m \in \mathbb{Z}$. Urmează $A^m + A^{-m} = (2 \cos mt) \cdot I_n$ deci $a_m = 2 \cos mt$.

II § 4. 1. Relația este imediată dacă se dezvoltă Δ_n după prima linie.

Avem $\Delta_2 = a - bc$ și $\Delta_3 = a^3 - 2abc$. a) $\Delta_n = 2\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2} \Rightarrow \Delta_n = n + 1$.

b) $\Delta_n = \Delta_{n-2} \Rightarrow 2\Delta_n = 1 + (-1)^n$. c) $\Delta_n = 3\Delta_{n-1} - 2\Delta_{n-2} \Rightarrow \Delta_n = 2^{n+1} - 1$.

d) $\Delta_n = 5\Delta_{n-1} - 6\Delta_{n-2} \Rightarrow \Delta_n = 3^{n+1} - 2^{n+1}$. e) $\Delta_n = 9\Delta_{n-1} - 20\Delta_{n-2} \Rightarrow \Delta_n = 5^{n+1} - 4^{n+1}$.

f) $(\alpha - \beta) \Delta_n = \alpha^{n+1} - \beta^{n+1}$. g) $\Delta_n \sin \alpha = \sin(n+1)\alpha$.

2. Dezvoltând după prima coloană $\Delta_n = 2^{n-1} + \Delta_{n-1}$. Rezultă $\Delta_n = 2^n - 1$.

3. Ca la 1, $\Delta_{n+1} = 2x\Delta_n - x^2\Delta_{n-1} \Rightarrow \Delta_{n+1} = (n+2)x^{n+1}$.

4. Dezvoltând după ultima linie, $\Delta_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right) \Delta_{n-1} - \frac{x}{n} \Delta_{n-2}$, adică

$$\Delta_n - \Delta_{n-1} = \frac{x}{n} (\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}) \text{ cu } \Delta_2 - \Delta_1 = \frac{x}{2} \text{ deci } \Delta_n - \Delta_{n-1} = \frac{x^n}{n!}, \text{ etc.}$$

5. Dezvoltând după prima linie $\Delta_n = (x+1)\Delta_{n-1} - x\Delta_{n-2}$. $(x-1)\Delta_n = x^{n+1} - 1$. Pentru $|x| < 1$ șirul converge; pentru $x \geq 1$, $\Delta_n \rightarrow \infty$; pentru $x \leq -1$ șirul diverge.

6. Este un determinant „tridiagonal”; $4\Delta_n = 3^{n+1} + (-1)^n$.

7. Idem $(1-x^2)\Delta_n = 1 - x^{2n}$.

8. Dezvoltând după prima coloană, $\Delta_n = a_0 x^n + \Delta_{n-1}$.

9. $\Delta_{2n} = (a^2 - b^2) \cdot \Delta_{2n-2} = (a^2 - b^2)^n$.

10. Pornind cu $i = n-1$ se amplifică linia i din V_n cu a_n și se scade din linia $i+1$. Dezvoltând după ultima coloană și scoțând în factor de pe coloana j

paranteza $a_j - a_n$ obținem $V_n = (-1)^{n+1} \cdot \prod_{j=1}^{n-1} (a_j - a_n) \cdot V_{n-1} = P_n \cdot V_{n-1}$, unde

$$P_n = \prod_{j=1}^{n-1} (a_n - a_j). \text{ Avem deci } V_n = P_n \cdot V_{n-1} = P_n \cdot P_{n-1} \cdot \dots \cdot P_3 \cdot V_2 \text{ și}$$

$$V_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1 = P_2, \text{ q.e.d.}$$

II § 5. 1. Vom demonstra prin inducție $P(n) : a_n = n$.

2. Relația de recurență impune pentru $n = 1$, $a_1 = 1$. Pentru $n = 2$ și $n = 3$ se obțin egalitățile $a_3 + 1 = a_2^2$ [i $4a_2 + 1 = a_3^2$] ce impun $a_2 = 2$ și $a_3 = 3$.

Presupunând că pentru $k = \overline{1, n}$ are loc $a_k = k$, relația de recurență din enunț

$$\text{devine } \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n \cdot a_{n+1}} = \frac{n}{a_{n+1}} \text{ și impune } a_{n+1} = n+1.$$

3. Se demonstrează prin inducție $a_n = \frac{1}{n!}$. Se interpretează $\frac{1}{k!(n-k)!}$ prin

$$\frac{1}{n!} C_n^k \text{ și se folosește identitatea } \sum_{k=0}^n C_n^k = (1+1)^n = 2^n.$$

4, 5. Prin inducție, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = n$.

6. Prin inducție, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = n+1$.

7. Pentru $n = 1$ inegalitatea devine $a_1(a_1 - 1) \leq 0$ și impune $a_1 = 1$. Pentru $n = 2$ din $a_2^2 - a_2 - 2 \leq 0$ și $a_2 > a_1 = 1$ se obține $a_2 = 2$. Presupunând că pentru $k < n$ s-au impus doar valorile $a_k = k$, inegalitatea devine $(a_n - n)(a_n + n - 1) \leq 0$; având $a_n \in \mathbb{N}$ și $a_n > a_{n-1} = n-1$ se impune $a_n = n$.

8. În astfel de probleme se încearcă reducerea relației de recurență la o recurență de ordin finit. Notând $y_n = \sum_{k=0}^n F_k x_{n-k}$ vom constata (*) $y_{n+2} = x_{n+2} + y_{n+1} + y_n$. Introducând în (*) valorile lui y_n date de membrii secunzi din (R_n) , în baza recurenței lui F_n deducem (**) $x_{n+5} - x_{n+4} = x_{n+3} - x_{n+2}$, recurență de ordin 4; deoarece $x_2 - x_1 = x_1 - x_0$ rezultă $x_{n+1} - x_n = 1$, recurență liniară de ordin 1 ce conduce rapid la soluția $x_n = n + 1$.

9. Notând $S_n = \sum_{k=1}^n kx_{n-k}$ rezultă (*) $S_{n+2} = 2S_{n+1} - S_n + x_{n+1}$. Înlocuind în

(*) S_n precizat de (R_n) , găsim

$$(**) (n+2)(n+3)x_{n+3} = 2(n+1)(n+2)x_{n+2} - (n-2)(n+3)x_{n+1}.$$

Trecând n în $(n-1)$ precizăm forma standard a unei relații de recurență liniare de ordin doi (R'_n) $(n+1)(n+2)x_{n+2} = 2n(n+1)x_{n+1} - (n-3)(n+2)x_n$.

Pentru moment, coeficienții acestei relații nu sunt constanți ci depind de n ca polinoame de grad doi. Cu scopul de a micșora gradul acestor polinoame evaluăm coeficientul lui n^2 în R'_n , anume $(1)y_n = x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n$.

Pentru a reexprima y_n : $y_n(n+1)(n+2) = 4(n+1)x_{n+1} + 4(n+2)x_n$ și $(2) z_n = (n+2)x_n - (n+1)x_{n+1}$, $(3) (n+1)(n+2)y_n = 4z_n$. Considerând și $(2') z_{n+1} = (n+3)x_{n+1} - (n+2)x_{n+2}$ transcriem (R'_n) sub forma $(4) (n-3)z_n - (n+1)z_{n+1} = 0$. Pentru șirul $(z_n)_{n \geq 0}$ avem acum prin (4) o recurență liniară de ordin 1; $(5) z_0 = z_1 = 0$. Acum (4) și (5) asigură $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_n = 0$. Prin intermediul lui (3) suntem asigurați că are loc $y_n = 0$ și avem deci pentru $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $(6) x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 0$, recurență liniară de ordin doi cu coeficienți constanți. Soluția generală a lui (6) se obține prin intermediul ecuației caracteristice $r^2 - 2r + 1 = 0$ și este $(7) x_n = an + b$. Din condițiile inițiale găsim $(8) x_n = n + 1$, ce constituie unica soluție a problemei.

II § 6. Considerând că în primele 12 probleme din acest paragraf verificarea proprietăților enunțate de către progresii nu reclamă dificultăți, vom prezenta doar demonstrații ale implicațiilor inverse.

1. Proprietatea enunțată constituie o recurență liniară omogenă de ordin doi cu coeficienți constanți cu soluția generală $a_n = c + nd$.

2. Deducem $2a_{n+1} = 2(S_{n+1} - S_n) = (n+1)(a_1 + a_n) - n(a_1 + n)$ adică $(R_n) (n-1)a_{n+1} = na_n - a_1$.

Punând în evidență (R_{n-1}) prin scădere se obține $2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$, etc.

3. Scăzând egalitatea enunțată din analoga pentru $n+1$, după eliminarea numitorilor rezultă $(*) a_1 = na_n - (n-1)a_{n+1}$. Trecem n în $n-1$ și eliminând a_1 obținem $a_{n-1} + a_{n+1} = 2a_n$.

4. Scăzând egalitățile ce se obțin dând lui n valorile $k+1$ și k obținem $a_{k+1} + a_k = k(a_1 + a_k) - (k-1)(a_1 + a_{k-1})$, adică $(*) (k-1)a_{k-1} = ka_k - a_1$ ce coincide cu (R_k) din indicația de la 2.

5. Pentru $n=3$ egalitatea din enunț impune $\div a_1, a_2, a_3$. Să admitem inductiv că valabilitatea egalităților enunțate pentru $n < m$ impune $\div a_1, \dots$

$\dots, a_{m-1}$. Observând $\frac{1}{a_1 a_m} + \frac{1}{a_m a_1} = \frac{2}{a_1 + a_m} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_m} \right)$ transcriem egalitatea din

enunț (formulată pentru $n=m$) sub forma $\frac{1}{a_2 a_m} + \frac{1}{a_3 a_{m-1}} + \dots + \frac{1}{a_m a_2} =$

$= \frac{2}{a_1 + a_m} \left(\frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{m-1}} \right)$. Transcriind ipoteza inductivă pentru $\div a_2, \dots, a_m$

obținem și $\frac{1}{a_2 a_m} + \frac{1}{a_3 a_{m-1}} + \dots + \frac{1}{a_m a_2} = \frac{2}{a_2 + a_{m-1}} \left(\frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{m-1}} \right)$. Egalitățile

evidențiate asigură acum $a_1 + a_m = a_2 + a_{m-1}$ adică $a_m - a_{m-1} = a_2 - a_1 = \text{ct}$ deci $\div a_1, a_2, \dots, a_{m-1}, a_m$, q.e.d.

6. Transcriem egalitatea din enunț pentru n trecut în $n+1$ și obținem prin

scădere $\frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}}} = \frac{n}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_{n+1}}} - \frac{n-1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}}$ ce devine rapid

$(n-1)a_{n+1} + a_1 = na_n$, adică (R_n) din indicația de la 2.

7. Ipoteza induce $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \dots$ deci $a_n - a_{n-1} = a_2 - a_1 = \text{constant}$.

8. Dacă renotăm $a_2 = qa_1$, egalitățile enunțate dau succesiv pentru $n=2, 3, \dots$

$m-1$: $a_3 = a_2 q = a_1 q^2$; $a_4 = a_1 q^3, \dots, a_m = a_1 q^{m-1}$.

9. Din (P_3) : $a_3 = a_1 q^2$ și, pentru $n \geq 4$ scăzând (P_{n-1}) din (P_n) : $a_n = a_1 q^{n-1}$.

10. Fie $a_2 = qa_1$. Din (Q_3) găsim $a_1 \cdot a_3 = a_2^2$, adică $a_3 = a_1 q^2$. Împărțind (Q_{n+1}) la (Q_n) după ridicare la pătrat și simplificări deducem $a_1 (Q_{n+1})^{n-1} = (Q_n)^n$. Rezultă prin inducție $a_{n+1} = a_1 q^n$.

11. Prin identitatea lui Lagrange (L_n) impune $\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \dots = \frac{a_n}{a_{n+1}}$.

12. Fie $q = \frac{a_2}{a_1}$. Din (M_3) rezultă $a_3 = a_1 q^2$. Să admitem prin inducție că din

(M_k) cu $3 \leq k < n$ a rezultat $a_m = a_1 q^{m-1}$ pentru $2 \leq m < n$. În aceste condiții (M_n) precizează $a_n = a_1 q^{n-1}$.

13, 14. Deoarece demonstrațiile solicitate reclamă calcule mai puțin atractive vom remarca doar că ne plasăm în condițiile teoremei de existență și unicitate (în raport cu condiții inițiale evidente) din I § 2. O simplă verificare asigură că progresiile aritmetice satisfac (A_n) respectiv (B_n) și constituie deci soluția generală a acestor egalități.

IV § 1. 1. $f_n(x) = a_n x + b_n$ cu $a_n = a^n$ și $b_n = b \cdot (a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1) = \frac{b}{a-1} (a^n - 1)$ (dacă $a \neq 1$).

2. Prin inducție, $f_n(x) = x \cdot (1 + nx^2)^{\frac{1}{2}}$. 3. Prin inducție $f_n(x) = x^{2^n}$.

4. Desigur $f_n(x) = x^{2^n}$. 5, 6, 7. $f_{2n}(x) = x$, $f_{2m+1}(x) = f(x)$.

8. b) $g_{3k+1}(x) = g(x)$, $g_{3k+2}(x) = \frac{x-1}{x}$, $g_{3k+3}(x) = x$. c) Înlocuim x prin $g_k(x)$

pentru $k=1, 2, 3$.

9. Desigur $f(a) = a \Rightarrow \forall n, f_n(a) = a$. Dacă $f_n(b) = b$, fie $c = f(b)$ dar eventualitățile $c < b$ sau $c > b$ conduc la absurd.

IV § 2. 1. Găsim $a_2 = 1$ și demonstrăm prin inducție că a_n crește monoton fiind mărginit superior de 2. Din $a_n \rightarrow l$ găsim $l = 2$.

3. $a_n = \sqrt[n]{\frac{n}{2}} (n+1) \rightarrow 1$.

5. Prin Stolz, $\frac{1}{nx_n} = \frac{\alpha_n}{\beta_n}$, $\frac{\alpha_{n+1} - \alpha_n}{\beta_{n+1} - \beta_n} = \frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} = nx_n$. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nx_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} nx_n$.

6. Prin $\frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 - \frac{1}{x_n}$, x_n descrește monoton la 0. Prin Stolz, $nx_n \rightarrow 1$.

7. a) x_n descrește monoton la 0. b) $y_n = \frac{1}{1 - x_{n-1}} \rightarrow 1$.

c) Prin Stolz, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{y_{n+1}} = 1$.

8. x_n este strict crescător; nu poate fi mărginit superior fiindcă limita sa l ar satisface $l = l + e^{-l}$ deci este nemărginit. O primă aplicare a lui Stolz impune calculul (prin Stolz): asigură $\lim_{n \rightarrow \infty} n e^{-x_n} = 1$.

9. Avem $0 < a_n < a_{n+1} < 1$ și $a_n \rightarrow 1$.

Se observă $(a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n)^2 = \frac{1 - a_{n+1}}{1 - a_1} \rightarrow 0$. Urmează $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^n = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n(a_n - 1)}$,

prin Stolz $n(a_n - 1) \rightarrow -\frac{1}{2}$.

10. Folosind $e^x > 1 + x$, (x_n) crește monoton la 0. Prin Stolz $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n x_n} = \frac{1}{2}$.

11. b), c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

12. a) Pentru $a > 0$ ecuația admite o singură rădăcină reală, pozitivă.

b) (x_n) descrește monoton la zero.

13. O singură rădăcină reală negativă. Șirul crește monoton la zero.

14. (x_n) descrește monoton la zero. 15. a_n crește monoton la 1.

16. a) Funcția continuă $f(x) = x^n - nx + 1$ satisface $f(0) = 1 > 0$,

$f(1) = 2 - n < 0$ și $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) > 0$. b) Din $0 < \alpha_n = \frac{1}{n}(1 + \alpha_n^2) < \frac{2}{n}$, $\alpha_n \rightarrow 0$.

c) Din $1 < \beta_n < \sqrt[n]{n}$, $\beta_n \rightarrow 1$.

17. $f_n(x) = 1 - (1 - x)^{2^n}$. Pentru $x = 0$ și $x = 1$ șirul (a_n) este constant.

18. $a_n \rightarrow 1 - \sqrt{1 - b}$.

19. Folosind $y_n = x_{n+1} - x_n$: $x_n = x_0 + \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\right] y_0 \rightarrow x_0 + \frac{1}{e} y_0$.

20. b) Cu $a_n = \alpha_n + a$, $b_n = \beta_n + b$ se reduce problema la cazul a).

21. Se transcrie egalitatea sub forma $(a_n - 2)^2 + (b_n + 1)^2 + (c_n - 3)^2 = d_n^2$.

22. Dacă $a = b$, (x_n) este șirul constant (a) . Dacă $a < b$ avem $a < x_n < x_{n+1} < b$ și $x_n \rightarrow b$. Dacă $b < a$ avem $b < x_n < x_{n+1} < a$ și $x_n \rightarrow a$.

23. $\left(1 + \frac{1}{n} x_n\right)^n \leq y_n \leq \left(1 + \frac{1}{n} z_n\right)^n$ unde $z_n = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$. $y_n \rightarrow e$.

24. Dacă $a_1 = 0 \Rightarrow a_n = 1$. Dacă $a_1 < 1$, $a_{n+1}(a_{n+1} - a_n) = (a_{n+1} - 1)^2$ și (a_n) crește monoton la 1. Dacă $a_1 > 1$, (a_n) descrește monoton la 1.

25. $x < \operatorname{tg} x \Rightarrow \operatorname{arctg} x < x \Rightarrow a_n < a_{n-1}$. Avem și $a_n > 0$ deci există $l = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. $\operatorname{arctg} l = l \Rightarrow l = 0$.

IV § 3. 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos nx}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{nx}{2}}{n^2 x^2} \cdot n^2 = \frac{n^2}{2}$.

Avem apoi $E_n = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \dots \cdot \cos nx}{x^2} = \frac{n^2}{2} + E_{n-1}$. Urmează

$E_n = \frac{1}{2}(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{12}$. Vezi 3.

2. Amplificând prin $\sum_{j=0}^{n-1} \sqrt[n]{(\cos nx)^j}$ deducem $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[n]{\cos nx}}{x^2} = \frac{n}{2}$. Apoi

$L_n = \frac{n}{2} + L_{n-1} = \frac{1}{4} \cdot n(n+1)$. Vezi 4.

3. $1 - f(x) \cdot f(2x) \cdot \dots \cdot f(nx) = [1 - f(nx)] + f(nx)[1 - f(x) \cdot \dots \cdot f((n-1)x)]$ asigură $E_n = E_{n-1} + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$.

4. $1 - f(x) \cdot \sqrt{f(2x)} \cdot \sqrt[3]{f(3x)} \cdot \dots \cdot \sqrt[n]{f(nx)} = 1 - \sqrt[n]{f(nx)} + \sqrt[n]{f(nx)} \cdot [1 - f(x) \cdot \sqrt{f(2x)} \cdot \dots \cdot \sqrt[n-1]{f((n-1)x)}]$ deci $L_n = \frac{1}{n} a_n + L_{n-1} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} a_k$.

5. $3x + 1 = y \Leftrightarrow x = \frac{y-1}{3} = g_1(y)$. Avem $f(y) = f \circ g(y)$ și deci

$f(x) = f \circ g_n(x)$. Acum $g_n(x) = 3^{-n} \left(x + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = -\frac{1}{2}$ deci f este funcție constantă pe $\mathbb{R}$.

6. Luând $g(x) = \frac{x-1}{2}$, $g_n(x) = 2^{-n}(x+1) - 1$ și $f(x) = f \circ g_n(x) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f \circ g_n(x) = f(-1) = f(x)$.

7. Aceeași idee, $g(x) = \frac{x-b}{a}$ conduce la $f(x) = f\left(\frac{b}{1-a}\right) = \text{constant}$.

IV § 4. 1. Prin inducție, $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + 1 = n$.

2. $a_1 = 2$, $b_1 = -3$; $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = a_k + b_k$; $a_n = 2$, $b_n = 2n - 5$.

3. $a_1 = 2$, $b_1 = 0$; $a_{k+1} = a_k + 2$, $b_{k+1} = a_k + b_k$; $a_n = 2n$, $b_n = n(n-1)$.

4. $a_n = (-1)^{n-1} \cdot 2n$, $b_n = (-1)^n \cdot n(n-1)$.

5. $a_n = 4n - 3$, $b_n = 2n^2 - 5n$. Discriminantul ecuației $2x^2 + a_n x + b_n = 0$ este $\Delta_n = 16n + 9 > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

6. $P_1(x) = -2x$; $P_{k+1}(x) = P'_k(x) - 2xP_k(x)$. Pentru $f(x) = e^{-x^2}$ avem $f'(x) = -2x f(x)$ și cu formula lui Leibniz $f^{(n+1)}(x) = (-2x)f^{(n)}(x) + (-2)C_n^1 f^{(n-1)}(x)$ adică $e^{-x^2} [P_{n+1}(x) + 2xP_n(x) + 2nP_{n-1}(x)] = 0$.

7. $P_1 = 1$, $P_{k+1}(x) = 2kxP_k(x) - x^2 P'_k(x) + P_k(x)$. Cu $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$, avem

$x^2 \cdot f'(x) = f(x)$. Derivând de n ori cu formula lui Leibniz rezultă recurența.

8. $P_1(x) = -x$, $P_{k+1}(x) = (1+x^2)P'_k(x) - (2k+1)xP_k(x)$. Avem

$(1+x^2)f'(x) + x f(x) = 0$; derivând de n ori cu formula lui Leibniz, pentru $x = 0$, avem $f^{(n+1)}(0) = -n^2 f^{(n-1)}(0)$, $f^{(2k+1)}(0) = 0$, $f^{(2k)}(0) = (-1)^k \cdot 2k - 1$.

9. Verificare prin inducție.

$$10. f^{(k)}(x) = (-1)^k \cdot k! (x+a)^{-k-1}, f^{(k)}(a) = (-1)^k \cdot k! (2a)^{-k-1}, x_n = \sum_{j=1}^{n+1} (2a)^{-j}$$

Dacă $a < \frac{1}{2}$, $x_n \rightarrow \infty$; $a = \frac{1}{2} \Rightarrow x_n = n+1 \rightarrow \infty$; $a > \frac{1}{2} \Rightarrow x_n \rightarrow \frac{1}{2a-1}$.

$$11. f(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}, f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x-2)^{n+1}} + \frac{(-1)^{n+1} \cdot n!}{(x-1)^{n+1}}, a_n \rightarrow 1.$$

12. Pentru $x \neq 0$ avem $f^{(n)}(x) = x^{-3n} \cdot P_n(x) \cdot f(x)$ unde P_n este polinom de grad $2(n-1)$ precizabil prin $P_1(x) = 2$, $P_{n+1}(x) = (2-3nx^2) \cdot P_n(x) + x^3 \cdot P'_n(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f^{(n)}(x) = 0.$$

13. Demonstrație prin inducție folosind formula de descompunere a combinațiilor $1 \leq k < n \Rightarrow C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$.

14. După prima derivare, $\sqrt{1-x^2} \cdot f'(x) = a \cdot f(x)$ iar după încă o derivare: $(1-x^2)f''(x) - x \cdot f'(x) - a^2 \cdot f(x) = 0$. Se derivează de n ori cu Leibniz.

15. Funcția este definită pentru $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, derivabilă doar pe $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

După două derivări $\sqrt{1-4x^2} \cdot f'(x) + 2 = 0$, $(1-4x^2)f''(x) - 4x \cdot f'(x) = 0$.

Cu formula lui Leibniz $(1-4x^2)f^{(n+2)}(x) - (8n+4)x \cdot f^{(n+1)}(x) - 4x^2 \cdot f^{(n)}(x) = 0$. $f^{(n)}(0) = 4(n-2)^2 \cdot f^{(n-2)}(0)$, $f'(0) = -2$, $f''(0) = 0$.

Avem $f^{(2k)}(0) = 0$ și $f^{(2k+1)}(0) = -2^{k+1}[(2k-1)!!]^2$.

16. Primele derivări dau $(1+x^2)f'(x) = 1$, $(1+x^2)f''(x) = -2x$. Cu formula lui Leibniz $(1+x^2)f^{(n)}(x) + 2(n-1)x f^{(n-1)}(x) + (n-1)(n-2)f^{(n-2)}(x) = 0$ găsim $f^{(n)}(0) + (n-1)(n-2)f^{(n-2)}(0) = 0$ și $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$. $f^{(2k)}(0) = 0$, $f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k \cdot (2k)!$.

17. $2(ax+b)f'(x) = -a \cdot f(x)$ asigură indefinit derivabilitatea. Se deduce $2(ax+b)f^{(n)}(x) = -(2n-1)f^{(n-1)}(x)$.

18. $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -f(x) \cdot f(x_0) \Rightarrow f'(x) = -f^2(x)$. Prin inducție, $f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot n! f^{n+1}(x)$. 19. $f^{(n)}(x) = a^n \cdot f(x)$.

20. Logaritmand și derivând (1), (2) după dezvoltări în serie: $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$ și $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^{n+1} x^n$ găsim

$$\left[-\frac{1}{2} + \frac{2}{3}x + \dots + (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n+2} x^{n+1} + \dots\right] \cdot [a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + \dots] = a_1 + 2a_2x +$$

$+3a_3x^2 + \dots + (n+1)a_{n+1}x^n + \dots$, respectiv

$$\left[\frac{1}{2} - \frac{2}{3}x + \dots + (-1)^n \frac{n+1}{n+2} x^{n+1} + \dots\right] \cdot [b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n + \dots] =$$

$= b_1 + 2b_2x + 3b_3x^2 + \dots + (n+1)b_{n+1}x^n + \dots$. Se obțin rapid (3) și (4). Avem

$$a_1 = -\frac{1}{2}, a_2 = \frac{11}{24}, a_3 = -\frac{7}{16}, \text{ etc. } b_1 = \frac{1}{2}, b_2 = -\frac{5}{24}, b_3 = \frac{5}{48}, \text{ etc.}$$

$$L_1 = \frac{e}{2}, L_2 = \frac{5}{24}e, L_3 = -\frac{5}{48}e, L_4 = \left(a - \frac{1}{2}\right)e, L_5 = \frac{e}{24}(12a^2 - 24a + 11) \text{ (deci}$$

dintre șirurile $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+a}$ cel mai rapid convergent la e se obține pentru

$$a = \frac{1}{2}, L_6 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n = e^{-\frac{1}{2}}, L_7 = e^{-\frac{1}{2}}, L_8 = L_9 = \frac{1}{2},$$

$L_{10} = -b_k \cdot e$, $L_{11} = -\frac{1}{e} \cdot a_k$, ultimele două limite oferind o frumoasă perspectivă de redefinire recursivă a șirurilor (a_n) , (b_n) .

IV § 5. 1. Considerăm funcții $h_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $k_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $g_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definite pentru $x \neq 0$ prin $h_n(x) = x^2 \sin^n \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$, $k_n(x) = 2x \sin^n \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$, $g_n(x) = (n+1) \cdot$

$\sin^{n+1} \frac{1}{x} - n \sin^{n-1} \frac{1}{x}$, completate prin $h_n(0) = k_n(0) = g_n(0) = 0$. Funcția h_n este derivabilă, $h'_n = g_n + k_n$. Funcția k_n este continuă deci k_n și g_n admit primitive.

Constatăm (1) $g_n = (n+1) \cdot f_{n+1} - n \cdot f_{n-1}$. Acum f_0 nu are proprietatea Darboux deci nu are primitive și (1) exclude existența primitivelor pentru orice f_{2p} .

Funcția f_1 are primitive și prin (1) vor avea și f_{2k+1} .

2. a) $F_n(x) = x^n e^x - nF_{n-1}(x)$. b) $G_n(x) = x \ln^n x - nG_{n-1}(x)$.

c) $H_n(x) = -x^n \cos x + nx^{n-1} \sin x - n(n-1)H_{n-2}(x)$.

d) $K_n(x) = x^n \sin x + nx^{n-1} \cos x - n(n-1)K_{n-2}(x)$.

e) $nS_n(x) = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)S_{n-2}(x)$.

f) $nC_n(x) = \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)C_{n-2}(x)$.

g) $(n-1)L_n(x) = \sin x \cos^{1-n} x + (n-2)L_{n-2}(x)$.

h) $(n-1)M_n(x) = -\cos x \sin^{1-n} x + (n-2)M_{n-2}(x)$.

i) $(n-1)[T_n(x) + T_{n-2}(x)] = \operatorname{tg}^{n-1} x$.

j) $(n-1)[P_n(x) + P_{n-2}(x)] = -\operatorname{ctg}^{n-1} x$.

k) $(a^2 + n^2)Q_n(x) = e^{ax} \sin^{n-1} x (a \sin x - n \cos x) + n(n-1)Q_{n-2}(x)$.

l) $(a^2 + n^2)R_n(x) = e^{ax} \cos^{n-1} x (a \cos x - n \sin x) + n(n-1)R_{n-2}(x)$.

m) $2na^2F_{n+1}(x) = x(x^2 + a^2)^{-n} + (2n-1)F_n(x)$.

n) $2na^2G_{n+1}(x) = x(a^2 - x^2)^{-n} + (2n-1)G_n(x)$.

o) $nH_n(x) = -x^{n-1} \sqrt{a^2 - x^2} + a^2(n-1)H_{n-2}(x)$.

p) $nK_n(x) = x^{n-1} \sqrt{a^2 + x^2} - a^2(n-1)K_{n-2}(x)$.

q) $nL_n(x) = x^{n-1} \sqrt{x^2 - a^2} + a^2(n-1)L_{n-2}(x)$.

$$r) (2n+1)M_n(x) = 2x^n \sqrt{1+x} - 2nM_{n-1}(x).$$

$$s) N_n(x) = x(\arcsin x)^n + n\sqrt{1-x^2}(\arcsin x)^{n-1} - n(n-1)N_{n-2}(x).$$

$$t) P_n(x) = x(\arccos x)^n - n\sqrt{1-x^2}(\arccos x)^{n-1} - n(n-1)P_{n-2}(x).$$

$$u) (m+1)F_{m,n}(x) = x^{m+1} \ln^n x - nF_{m,n-1}(x).$$

$$v) (m+1)G_{m,n}(x) = \sin^{m+1} x \cos^{n-1} x + (n-1)G_{m+2,n-2}(x).$$

$$x) 2(n-1)[H_{m,n}(x) - (m-1)H_{m-2,n-1}(x)] = -x^{m-1}(x^2 + a^2)^{1-n}.$$

$$3. \text{ Avem } 2F_n(x) + F_{n-1}(x) = \int x^{n-1} \sqrt{1+x+x^2} d(1+x+x^2) = \\ = \frac{2}{3} \int x^{n-1} d \left[(1+x+x^2)^{\frac{3}{2}} \right]. \quad 8F_n(x) + 5F_{n-1}(x) + 2F_{n-2}(x) = 2x^{n-1} (1+x+x^2)^{\frac{3}{2}}.$$

$$4. F_{n+1}(x) + (n-1)F_n(x) = -x^{1-n} e^{\frac{1}{x}}.$$

$$5. 2(n-1)(1+x^2)^{n-1}[F_n(x) - F_{n-1}(x)] = 1.$$

$$6. (n-1)[F_n(x) - F_{n-2}(x)] = 2\sin(n-1)x.$$

$$7. H_{n+2}(x) + H_n(x) = F_n(x); \quad H_n(x) - H_{n-1}(x) = (n-1)F_{n-2}(x) - x^{n-1}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

$$e^{\arctg x} \text{ și } (n-2)H_n(x) + H_{n-1}(x) + (n-1)H_{n-2}(x) = x^{n-1}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} e^{\arctg x}.$$

$$8. a) naF_n(x) + \left(n - \frac{1}{2}\right)b \cdot F_{n-1}(x) + (n-1)c \cdot F_{n-2}(x) = x^{n-1} \sqrt{ax^2 + bx + c}.$$

$$b) \text{ Se scrie } \int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = Q_{n-1}(x) \cdot \sqrt{ax^2 + bx + c} + \alpha \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

unde $Q_{n-1}(x)$ este o funcție polinomială de grad $(n-1)$ și α o constantă. Se derivatează, se elimină numitorii și se identifică α și coeficienții lui Q .

$$9. a) \text{ Prin derivare } a = c = 1 \text{ și } b = -2.$$

$$b) F_4(x) = -\frac{2}{3} \cos 3x - 2 \cos 2x - 6 \cos x + \ln(1 - \cos x) + K.$$

$$10. F_n(x) - F_{n-3}(x) = \frac{1}{n-1} x^{n-1} - \frac{1}{n-2} x^{n-2}.$$

$$11. a), b) F_n(x) = x^n \operatorname{sh} x - nH_{n-1}(x), \quad H_n(x) = x^n \operatorname{ch} x - nF_{n-1}(x).$$

$$c) nH_n(x) = (n-1)H_{n-2}(x) + \operatorname{sh} x \operatorname{ch}^{n-1} x. \quad d) nK_n(x) = (1-n)K_{n-2}(x) + \operatorname{sh}^{n-1} x \operatorname{ch} x.$$

$$e) (n-1)[F_n(x) - F_{n-1}(x)] = -e^x x^{1-n}.$$

$$12. (np+1)F_n(x) = anpF_{n-1}(x) + x(a + bx^p)^n.$$

$$13. (np+m+1)F_{n,m}(x) = anpF_{n-1,m}(x) + x^{m+1}(a + bx^p)^n.$$

$$14. F_n(x) = 4e^x \sum_{k=1}^n (k-1)! x^{-k} + C.$$

$$15. (n+1)F_n(x) = x^{n+1} \cos(\ln x) + H_n(x); \quad (n+1)H_n(x) = x^{n+1} \sin(\ln x) - F_n(x).$$

$$16. 4(n-1)F_n(x) = (4n-5)F_{n-1}(x) + x(1-x^4)^{1-n}.$$

$$17. n(a-b)^2 F_{n+1}(x) = 2(1-2n)F_n(x) - \frac{2x-a-b}{(x-a)^n(x-b)^n}.$$

$$IV \S 6. 1. a) I_n = e - n \cdot I_{n-1}. \quad b) I_n \cdot \ln a = a - n \cdot I_{n-1}.$$

$$c) 2nI_{n+1} = (1+a^2)^{-n} + (2n-1)I_n. \quad d) (m+1)I_{m,n} = 2^{-n}(\sqrt{e})^{m+1} - n \cdot I_{m+1,n-1}.$$

$$e) (n-1)I_n = \sqrt{3} \cdot 2^{n-2} - 2^{n-2}(\sqrt{3})^{1-n} + (n-2)I_{n-2}. \quad f) 8nI_{n+1} = 2 \cdot 3^n +$$

$$+ (2n-1)I_n. \quad g) (2n+1)I_n = 4 \cdot 3^n - 2n \cdot I_{n-1}. \quad h) nI_n = (n-1)I_{n-2} - 2^{-n} \cdot \sqrt{e}.$$

$$2. a) x \in [1, e] \Rightarrow \ln^{n+1} x \leq \ln^n x. \quad b) \ln x \geq 0 \Rightarrow a_n > 0.$$

$$c) a_n = x \ln^n x \Big|_1^e - n \int_1^e \ln^{n-1} x dx = e - na_{n-1}.$$

$$3. a) a_n = \ln 2 - n + n \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n}.$$

$$b) 0 \leq \ln(1+x^{n+1}) \leq \ln(1+x^n) \leq \ln 2 \Rightarrow 0 < a_{n+1} < a_n < \ln 2.$$

$$4. a) a_n - a_{n+1} = \int_0^1 (1-x^2)^n x^2 dx > 0 \text{ și } 0 < a_n < 1. \quad b) (2n+1)a_n = 2n \cdot a_{n-1}.$$

$$c) a_1 = \frac{2}{3} \text{ și recurența } b). \quad d) \text{ Se dezvoltă } (1-x^2)^n \text{ și se integrează.}$$

$$6. \text{ Cu substituția } x = 1-t, \beta_{m,n} = \beta_{n,m}. \text{ Integrând prin părți}$$

$$\beta_{m,n} = \frac{n}{m+1} \beta_{m+1,n+1}, \text{ deci } \beta_{m,n} = \frac{m!n!}{(m+n-1)!} \beta_{m+n-1}.$$

$$7. a) \text{ Se substituie } x = \frac{\pi}{2} - t. \quad b) \sin^{n+1} x \leq \sin^n x \Rightarrow a_{n+1} < a_n. \quad c) \text{ Integrând}$$

$$\text{prin părți. } d) \text{ Folosind } c) \text{ și } a_2 = \frac{\pi}{4}, a_1 = 1. \quad e) \text{ Conform } d). \quad f) \text{ Conform } b) \text{ și } e).$$

$$g) \text{ Se explicitează prin } c) a_{2n+1} < a_{2n} < a_{2n-1}.$$

$$8. a) x = \frac{\pi}{2} - t. \quad b) \text{ Integrare prin părți. } c) \text{ Folosind } b) \text{ și calculând } a_{n,m} \text{ pentru } m=1 \text{ și } m=0.$$

$$9. a) \text{ Integrând prin părți } 2a_n = \frac{1}{n} + a_{n-1} \Rightarrow 2^{n+1} \cdot a_n = \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{k}. \quad b) \text{ Analog, } 2^{n+1} \cdot b_n = \pi.$$

$$10. \text{ Analog, relațiile de recurență fiind } 2a_n = b_{n-1}, 2b_n = -a_{n-1} \text{ și } 2^n a_n = \\ = -4 \cos \frac{n\pi}{2} + 4 \sin \frac{n\pi}{2} \text{ respectiv } 2^n b_n = -4 \cos \frac{(n+1)\pi}{2} + 4 \sin \frac{(n+1)\pi}{2}.$$

$$11. \text{ Se integrează prin părți de câte două ori.}$$

$$12. a_n = \frac{\pi}{2^n}, b_n = 0. \text{ Dacă } m-n = 2k+1, c_{m,n} = 0 \text{ iar dacă } m-n = 2k,$$

$$2^{n-1} c_{m,n} = 2^{n-1} c_{m,n} = \pi C_m^{m-n}.$$

$$13. \text{ Se calculează } a_n + a_{n-2}.$$

14. c) $2a_n < a_n + a_{n-2} < \frac{1}{n-1}, \frac{1}{n+1} < a_n + a_{n-2} < 2a_n$.
15. $a_n = -a_{n-1} + \frac{1}{2n-1} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n-3} + \dots + \frac{(-1)^n}{3} + (-1)^{n+1} + (-1)^n \cdot \frac{\pi}{4}$.
16. Avem $\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. Se substituie $x = \frac{\pi}{4} - t$.
17. a) Prin substituție liniară se reduce la 6. b) Pentru $y_n = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} (b-a)^{2n+1}$, $\sqrt[n]{y_n}$ și $\frac{y_{n+1}}{y_n}$ tind la aceeași limită, $\frac{1}{4}(b-a)^2$.
18. a) Se folosește 6. sau 17. a). b) Se dezvoltă binomul din a).
- c) Particularizând în 17: $a = -1$, $b = 1$. d), e) Cu schimbări de variabilă $x = a \sin t$ respectiv $x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \sin t$.
19. Integrând prin părți se stabilește o relație de recurență între $I_{u,v} = \int_a^b f^{(u)}(x) g^{(v)}(x) dx$ cu $u+v=n$, $0 \leq u \leq n$. (Desigur $f^{(0)} = f$, $g^{(0)} = g$)
20. Se aplică inegalitatea Cauchy - Buniakowski.
21. Prin inducție, $(n-1)! f_n(x) = (x-1)^{n-1}$.
22. Prin inducție, $0 \leq a_{n+1} \leq a_n \leq 1$.
23. Pentru o primitivă F a lui f , $a_n = F_{(n+1)} - F_{(n)}$. Dacă $a_n \rightarrow A$ atunci și $b_n = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = \frac{1}{n}[F_{(n)} - F_{(0)}] \rightarrow A$.
24. f este mărginită; $|f(x)| \leq M \Rightarrow \left| \int_a^x f(t) dt \right| \leq m(x-a)$ deci $|f(x)| \leq M(x-a)$. Rezultă succesiv $|f(x)| \leq \frac{M}{n!}(x-a)^n$; la limită $\forall x$, $|f(x)| = 0$.
25. a) $e^{-t} t^{x-1} \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0$. Din $x < y \Rightarrow t^{x-1} \geq t^{y-1} \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.
- b) Integrând prin părți. c) Rezultă din b). (Desigur A_n^k notează aranjamente de n luate câte k). d) $a_n = f(n)$ descrește monoton și $a_n > 0$.
26. a) $F_{n+1}(x) = -x^{n+1}e^{-x} + (n+1)F_n(x)$. b) $a_1 = 1$. c) Dacă $\lim_{x \rightarrow \infty} F_n(x) = a_n$, atunci $a_{n+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} F_{n+1}(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (n+1)F_n(x) = (n+1)a_n = (n+1)!$. Interpretarea geometrică prin aria subgraficului lui $x^n e^{-x}$.
27. (*) $a_n = \frac{1}{\pi} - \frac{n(n-1)}{\pi^2} a_{n-2}$. Din $0 \leq \sin \pi x \leq 1$ rezultă $0 < a_n < \frac{1}{n+1}$, deci $a_n \rightarrow 0$. Prin (*) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 a_n = \pi$.
28. a) Din $0 \leq t^{n+1} \leq t^n \Rightarrow 0 < x_{n+1} < x_n$. b) După două integrări prin părți $x_n = -\cos 1 + n \sin 1 - n(n-1)x_{n-2}$.

BIBLIOGRAFIE

- [1]. Aramă, L.; T. Morozan - *Probleme de calcul diferențial și integral*, Editura Tehnică, București, 1978.
- [2]. Bățineșu, D.M. - *Șiruri*, Editura Albatros, București, 1979.
- [3]. Bățineșu, D.M. ș.a. - *Exerciții și probleme de analiză matematică pentru clasele a XI-a și a XII-a*. Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1981.
- [4]. Brânzei, R. - *Proiectarea și analiza algoritmilor*. - Editura Universității "Al. I. Cuza", Iași, 1995
- [5]. Georgescu-Buzău, E.; A. Bogrescu - *Inducția matematică și aplicațiile ei*. Editura Tehnică, BSSM, 1978.
- [6]. Hall, M. Jr. - *Combinatorial Theory*, Blaisdell, Waltham, 1967.
- [7]. Iaglom, A.M. & I.M. - *Probleme neelementare tratate elementar*. Editura Tehnică, București, 1985.
- [8]. Markușevici, A.I. - *Șiruri recurente*. Editura Tehnică, BSSM, 1953.
- [9]. Nicolescu, C.P. - *Analiză matematică, aplicații*. Ed. Albatros, București, 1987.
- [10]. Popescu, D.; G. Oboroceanu - *Exerciții și probleme de algebră, combinatorică și teoria numerelor*. Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1979.
- [11]. Schneider, V. & Gh. A. - *Culegere de probleme de analiză matematică* Editura Hiperion, Craiova, 1993.
- [12]. Sireșki, Gh. - *Calcul diferențial și integral*. Exerciții. Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1985.
- [13]. Tomescu, I. - *Introducere în combinatorică*. Ed. Tehnică, București, 1972
- [14]. Tomescu, I. - *Probleme de combinatorică și teoria grafurilor*. Editura Didactică și Pedagogică, București, 1981.
- [15]. Vorobiev, N.N. - *Numerale lui Fibonacci*. Editura Tehnică, BSSM, 1953.
- [16]. Gazeta Matematică, 1970 - 1994.
- [17]. Lucrările seminarului de Didactica Matematicii, vol. 1 - 9. Universitate, Cluj, 1985 - 1994.
- [18]. Matematica pentru elevi, Galați, nr. 1 - 13.
- [19]. Revista Matematică a elevilor din Timișoara, 1980 - 1990.